

Аналогично, если функция $f(x)$ неограничена только в интервале $(a, a+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, то несобственный интеграл

$\int_a^b f(x) dx$ определена так:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx$$

Несобственный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ называется сходящимся, если граничный предел существует, и расходящимся - в противном случае.

Пример

Исследовать на сходимости $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha}$$

при $\alpha \neq 1$
$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \left. \frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

но $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$, если $\alpha < 1$;

если же $\alpha > 1$, то $\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ не имеет конечного предела при $\varepsilon \rightarrow 0+0$.