Из неотрицательности $f(x)$ $\forall x \geq 0$ следует, что $J(b)$ – неубывающая функция от b.
Действительно, если $b_1 > b$, то

$$J(b_1) = \int_a^{b_1} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^{b_1} f(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx = J(b)$$

Далее, т.к. $f(x) \leq \varphi(x)$ для $\forall x \geq a$, то при $\forall b > a$ имеем $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$

Интеграл $\int_a^b \varphi(x)dx$ не превосходит несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$, который по условию сходится. Следовательно, при любом $b > a$ имеем

$$J(b) = \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} \varphi(x)dx = L$$

Итак, интеграл $J(b) = \int_a^b f(x)dx$ представляет собой функцию от b, неубывающую и ограниченную сверху (при $b \to +\infty$).
Поэтому $J(b)$ имеет конечный предел при $b \to +\infty$, а это, согласно определению, означает, что интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится.
Первое утверждение теоремы доказано.