подставим вместо $\rho = \rho(\varphi)$

$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi \end{cases}$ рассмотрим как параметрическое уравнение

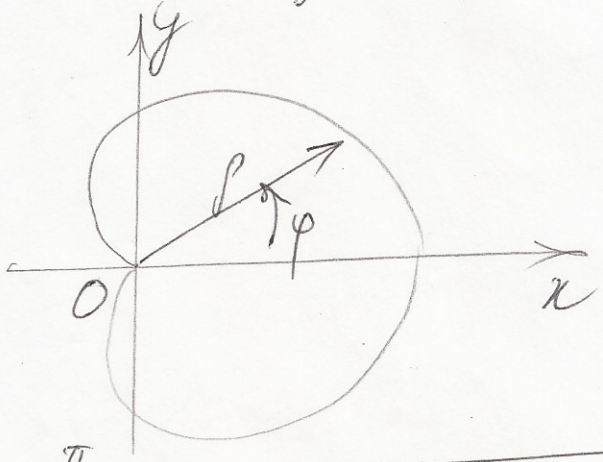
$\begin{cases} x'_\varphi = \rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi \\ y'_\varphi = \rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi \end{cases}$

$$x'^2_\varphi + y'^2_\varphi = \rho'(\varphi)^2 + \rho(\varphi)^2 = \rho'^2 + \rho^2$$

Тогда длина дуги $S = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}\, d\varphi$,

где $\alpha \le \varphi \le \beta$.

Пример.
Найти длину кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$



Для половины длины
$0 \le \varphi \le \pi$.

$\rho' = -a\sin\varphi$.

$$S = 2\int_0^\pi \sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2 + a^2\sin^2\varphi}\, d\varphi = 2a\int_0^\pi \sqrt{2+2\cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$= 4a\int_0^\pi \cos\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Big|_0^\pi = 8a.$$