ломаной суммы

$$(1)\quad P_n = \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i,$$

распространенные на все звенья ломаной. Предел этой суммы, когда наибольшее звено ломаной $\Delta S_i$ стремится к нулю, называют площадью рассматриваемой поверхности вращения.

Сумма (1) не является интегральной суммой для функции

$$(2)\quad 2\pi \cdot f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2},$$ т. к. в слагаемом, соответствующем отрезку $[x_{i-1}; x_i]$, фигурирует несколько точек этого отрезка $x_{i-1}; x_i; \xi_i$. Но можно доказать, что предел суммы (1) равняется пределу интегральной суммы для функции (2):

$$P = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left[f(x_{i-1}) + f(x_i)\right] \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i =$$

$$= \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} 2f(\xi_i) \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\, \Delta x_i,$$