Т.к. эта сумма является интегральной суммой для функции $\rho^2=[\rho(\varphi)]^2$ на отрезке $\alpha \le \varphi \le \beta$, то ее предел при $\max \Delta\varphi_i \to 0$ есть определенный интеграл $\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2 d\varphi$.

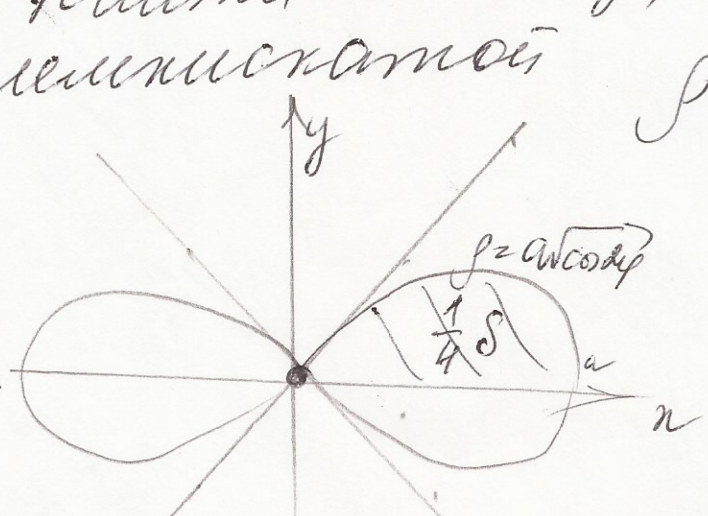
Он не зависит от того, какой радиус-вектор $\bar{\rho}_i$ мы возьмем внутри угла $\Delta\varphi_i$. Этот предел естественно считать искомой площадью фигуры.

Т.о., площадь сектора OAB равна

$$\boxed{S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}[\rho(\varphi)]^2 d\varphi}$$

Пример

Найти площадь, ограниченную лемнискатой $\rho=a\sqrt{\cos 2\varphi}$



$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi/4}\left(a\sqrt{\cos 2\varphi}\right)^2 d\varphi=$$

$$=\frac{4}{2}a^2\int\limits_{0}^{\pi/4}\cos 2\varphi\, d\varphi=\frac{a^2}{4}\cdot 4=a^2$$

Ответ: $S=a^2$