Длина ломаной равна $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Длиной S дуги AB называется предел, к которому стремится длина вписанной ломаной, когда длина ее наибольшего звена стремится к нулю:

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i .$$

Докажем, что если на отрезке $a \le x \le b$ функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ непрерывны, то этот предел существует. Вместе с тем получим и способ вычисления длины дуги.

Введем обозначение

$$\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$$

Тогда по т. Пифагора

$$\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i ,$$

по т. Лагранжа имеем

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i),$$

где $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Следовательно,

$$\Delta S_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2}\, \Delta x_i .$$