По условию, $f'(x)$ непрерывна, следовательно, функция $\sqrt{1+[f'(x)]^2}$ тоже непрерывна.

Поэтому существует предел написанной интегральной суммы, который равен определенному интегралу:

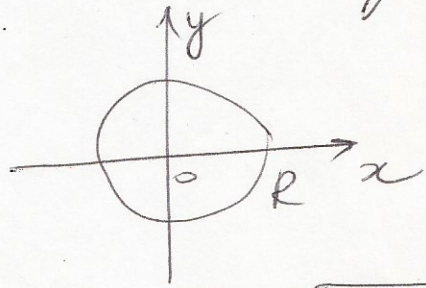
$$S=\lim_{\max \Delta x_i \to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+[f'(\xi_i)]^2}\,\Delta x_i=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx$$

Т.о, длина дуги

$$S=\int_a^b\sqrt{1+(f'_x)^2}\,dx$$

Пример.

Найти длину окружности $x^2+y^2=R^2$



Найдем $\frac{1}{4}$ длины окружности, лежащей в 1-ой четверти

$y\geq 0$ $\quad y=\sqrt{R^2-x^2}$

$$y'_x=-\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}$$

$$S=4\int_0^R\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=4\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx=4R\arcsin\frac{x}{R}\Big|_0^R=$$

$$=4\cdot\frac{\pi R}{2}=2\pi R.$$