$$\frac{dv}{v} = -p(x)\,dx, \text{ интегрируем}$$

$$\ln|v| = -\int p(x)\,dx + C$$

$$v = C_1 e^{-\int p(x)\,dx}$$

Т.к. нам достаточно какого-либо отличного от нуля решения ур-я (2), то за функцию v возьмем

$$v = e^{-\int p(x)\,dx}$$ – т.е. к-л частное решение.

подставим в (1)' $u'v + u\underbrace{(v' + v\cdot p(x))}_{=0} = q(x)$,

$$u'v = q(x)$$

$$\frac{du}{dx}\cdot v(x) = q(x)$$

$$du = \frac{q(x)}{v(x)}\,dx,$$

$$u = \int \frac{q(x)}{v(x)} + C,$$

окончательно $y = uv$

$$y = v(x)\cdot\left[\int \frac{q(x)}{v(x)} + C\right].$$