Решение однородного уравнения.

По условию $f(\lambda x; \lambda y) = f(x; y)$.

Положим в этом ↑ тождестве $\lambda = \frac{1}{x}$, $x = \frac{1}{\lambda}$

получим $f(x; y) = f(\lambda x; \lambda y) =$

$$= f\left(1; \frac{\lambda y}{\lambda x}\right) = f\left(1; \frac{y}{x}\right).$$

умним на x o

т.е. однородная функция нулевого измерения зависит только от отношения аргументов.

Уравнение (*) $\frac{dy}{dx} = f(x; y)$ примет вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1; \frac{y}{x}\right).$$

Сделаем подстановку $u = \frac{y}{x}$, т.е

$$y = ux$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} \cdot x + u \frac{dx}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx} x;$$

подставим в (*)

$u + \frac{du}{dx} \cdot x = f(1; u)$ уравнение с разделяющимися переменными

$$x \frac{du}{dx} = f(1; u) - u$$

$$\frac{du}{f(1; u) - u} = \frac{dx}{x}$$