Приращение функции $\Phi(x)$ равно

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} + \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt},$$

т.е. $$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt.$$

применим к интегралу теорему о среднем значении

$$\Delta\Phi = f(\xi)\cdot(x+\Delta x - x) = f(\xi)\cdot\Delta x,$$

где ξ лежит между x и $x+\Delta x$.

Найдем отношение приращения функции к приращению аргумента

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \frac{f(\xi)\cdot\Delta x}{\Delta x} = f(\xi).$$

Следовательно, $$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(\xi).$$

Но $\xi \to x$ при $\Delta x\to 0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(\xi) = \lim_{\xi\to x} f(\xi),$$

вследствие непрерывности функции $f(x)$

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi) = f(x), \text{ значит } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(x),$$

т.е. $\Phi'(x) = f(x)$. ч.т.д.