Тогда будет справедлива формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt.$$

Доказательство

По формуле Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – какая-нибудь первообразная для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, т.е.

$$F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a;b]$$

Возьмем сложную функцию от t, а именно $\Phi(t) = F[\varphi(t)]$, определенную на отрезке $[\alpha;\beta]$.

По правилу дифференцирования сложной функции ее производная равна

$$\Phi'(t) = F'[\varphi(t)]\,\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\cdot\varphi'(t).$$

Т.о., функция $\Phi(t)$ есть первообразная для функции $f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)$, непрерывной на $[\alpha;\beta]$, и по формуле Ньютона-Лейбница получим

$$\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha) = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$