

$a > 0$

Пример $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} x = a \sin t, \quad t = \arcsin \frac{x}{a} \\ dx = a \cos t dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=a \Rightarrow t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right. =$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a^2 \cos^2 t dt = a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{\pi a^2}{4}.$$

Интегрирование по частям.

Теорема. Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют на отрезке $[a; b]$ непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$. Тогда имеет место равенство

$$\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Доказательство

В силу условий теоремы произведение $uv = u(x) \cdot v(x)$ данных функций имеет на $[a; b]$ производную, равную

$$(uv)' = uv' + u'v, \text{ т. е.}$$

uv первообразная для $u'v + uv'$ на $[a; b]$.