

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \underbrace{\int_{-a}^0 f(x) dx}_{(1)} + \underbrace{\int_0^a f(x) dx}_{(2)}$$

Сделаем

в выражении (1) замену $x = -t$,

$$dx = -dt,$$

$$t = -x.$$

Тогда

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_a^0 f(t) dt = \int_0^a f(-t) dt = \int_0^a f(-x) dx$$

значит,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)] dx$$

Если задана функция $f(-x) = f(x)$, тогда

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Если задана функция $f(-x) = -f(x)$,

тогда

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

