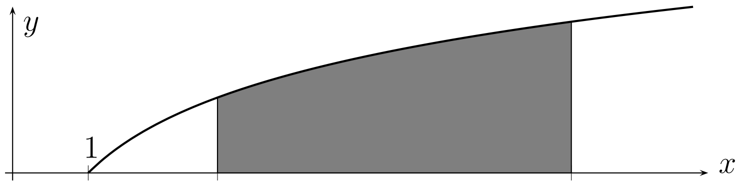
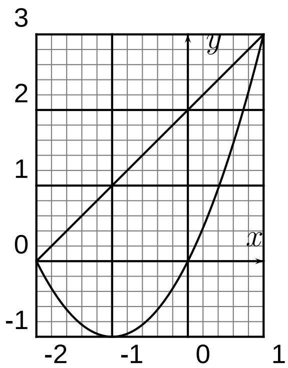
Занятие 10. Вычисление площади плоской фигуры.

6.453. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$ и прямыми $x = e$, $x = e^2$, $y = 0$.



$$\triangleleft\ S = \int\limits_e^{e^2} \ln x\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x \\ v = x \end{vmatrix} = x \ln x\Big|_e^{e^2} - \int\limits_e^{e^2} dx = 2e^2 - e - (e^2 - e) = e^2. \triangleright$$

6.456. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$.



$\triangleleft$ Найдём точки пересечения кривых:

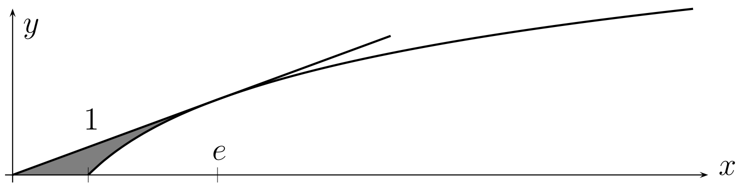
$$\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow\ x = -2 \text{ или } x = 1.$$

$$S = \int\limits_{-2}^{1} (x + 2 - x^2 - 2x)\, dx = \int\limits_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2)\, dx =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{8}{3} + 2 + 4 = \frac{9}{2}. \triangleright$$

.

6.467. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, касательной к ней в т. $x = e$ и осью Ox.



$\triangleleft$ Имеем $y'\big|_{x=e} = \frac{1}{x}\big|_{x=e} = \frac{1}{e}$, поэтому уравнение касательной в т. $x = e$ $y - 1 = \frac{1}{e}(x - e)$ или $y = x/e$.

$$S = \int\limits_0^1 \frac{x\, dx}{e} + \int\limits_1^e \left(\frac{x}{e} - \ln x\right)\, dx = \int\limits_0^e \frac{x\, dx}{e} - \int\limits_1^e \ln x\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x \\ v = x \end{vmatrix} =$$

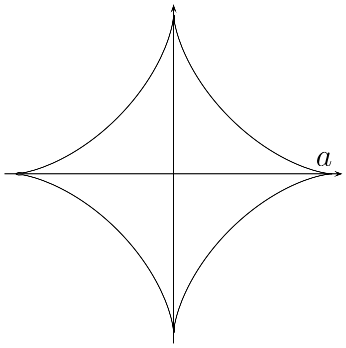
$$= \frac{e^2}{2e} - \left(x \ln x\Big|_1^e - \int\limits_1^e dx\right) = \frac{e}{2} - (e - (e - 1)) = \frac{e}{2} - 1. \triangleright$$

Если фигура ограничена параметрически заданной кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$, прямыми $x = a$, $x = b$ и осью Ox, то её площадь

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\,d(x(t)).$$

Эта формула применима для вычисления площади замкнутой кривой (направление обхода кривой по часовой стрелке).

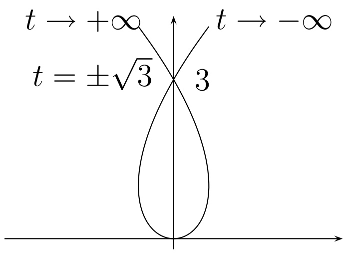
6.478. Найти площадь фигуры, ограниченной астроидой $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.



$$\triangleleft\ \frac{1}{4}S = \int_0^a y\,dx = \int_{\pi/2}^0 a\sin^3 t \cdot 3a\cos^2 t(-\sin t)\,dt =$$
$$= 3a^2\int_0^{\pi/2} \sin^4 t\cos^2 t\,dt = 3a^2\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4}\sin^2 2t \cdot \frac{1-\cos 2t}{2}\,dt =$$
$$= \frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,dt - \frac{3a^2}{8}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\cos 2t\,dt =$$
$$= \frac{3a^2}{16}\int_0^{\pi/2} (1-\cos 4t)\,dt - \frac{3a^2}{16}\int_0^{\pi/2} \sin^2 2t\,d(\sin 2t) =$$

$$= \frac{3a^2}{16}t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{3a^2}{64}\sin 4t\Big|_0^{\pi/2} - \frac{3a^2}{48}\sin^3 2t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{3\pi a^2}{32}; \quad S = \frac{3\pi a^2}{8}. \ \triangleright$$

6.479. Найти площадь петли кривой $x = \frac{1}{3}t(3-t^2)$, $y = t^2$.



$\triangleleft$ Найдём точку самопересечения:

$$\begin{cases} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \\ t_1 \neq t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}t_1(3-t_1^2) = \frac{1}{3}t_2(3-t_2^2) \\ t_1^2 = t_2^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (t_1 - t_2)(3 - t_1^2) = 0 \Rightarrow t_1^2 = t_2^2 = 3.$$

$$S = \int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} t^2 \cdot \frac{1}{3}\left[(3-t^2) - 2t^2\right]\,dt = \int_{\sqrt{3}}^{-\sqrt{3}} t^2(1-t^2)\,dt = 2\int_0^{\sqrt{3}} t^2(t^2-1)\,dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}} =$$

$$= 2\left(\frac{9\sqrt{3}}{5} - \frac{3\sqrt{3}}{3}\right) = 2\sqrt{3}\left(\frac{9}{5} - 1\right) = \frac{8\sqrt{3}}{5}. \ \triangleright$$

Площадь фигуры, ограниченной кривой в полярных координатах, заданной уравнением $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ равна

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} r^2\,d\varphi.$$

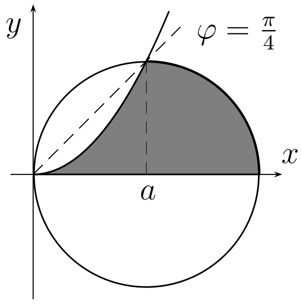
6.483. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1+\sin\varphi)$.

$$\triangleleft \quad S = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} a^2(1+\sin\varphi)^2\,d\varphi = a^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1+2\sin\varphi+\sin^2\varphi\right)\,d\varphi =$$

$$= a^2\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left(1+2\sin\varphi+\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\right)\,d\varphi = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi - 2\cos\varphi - \frac{1}{4}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} =$$

$$= a^2\left(\frac{3\pi}{4}+\frac{3\pi}{4}-2+2-0+0\right) = \frac{3\pi a^2}{2}. \ \triangleright$$

6.486. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $r_1 = a\operatorname{tg}\varphi\sec\varphi$, $r_2 = 2a\cos\varphi$ и полярной осью.



$\triangleleft$ Перейдём к полярным координатам:

$r = a\operatorname{tg}\varphi\sec\varphi \;\Rightarrow\; r^2 = \dfrac{ar\sin\varphi}{\cos^2\varphi} \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; r^2\cos^2\varphi = ar\sin\varphi \;\Rightarrow\; x^2 = ay$ — парабола.

$r = 2a\cos\varphi \;\Rightarrow\; r^2 = 2ar\cos\varphi \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; x^2+y^2 = 2ax \;\Rightarrow\; (x-a)^2+y^2 = a^2$ — окружность.

Точка пересечения — $(a;a)$.

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4} 4a^2\cos^2\varphi\,d\varphi - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\left(\frac{a\sin\varphi}{\cos^2\varphi}\right)^2\,d\varphi = 2a^2\int\limits_0^{\pi/4}\cos^2\varphi\,d\varphi - \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^2\varphi\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} =$$

$$= a^2\int\limits_0^{\pi/4}(1+\cos 2\varphi)\,d\varphi - \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/4}\operatorname{tg}^2\varphi d(\operatorname{tg}\varphi) = a^2\left(\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{\pi/4} - \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\operatorname{tg}^3\varphi}{3}\Bigg|_0^{\pi/4} =$$

$$= a^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) - \frac{a^2}{6} = a^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}\right). \ \triangleright$$