Занятие 11. Несобственные интегралы и их сходимость.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,+\infty)$. По определению *несобственный интеграл первого рода* $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Если этот предел существует, говорят, что интеграл *сходится*, в противном случае он *расходится*. Аналогично $\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

По определению $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$, $c\in\mathbb{R}$, причём считают, что этот интеграл сходится, если сходятся оба интеграла в правой части.

Из определения следует, что для вычисления несобственных интегралов применима формула Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}(F(b)-F(a)) = \lim_{b\to+\infty}F(b)-F(a).$$

Если предел в правой части конечен, то интеграл сходится, иначе — расходится.

В следующих задачах вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

6.411.

$$\triangleleft\ \int\limits_e^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x} = \int\limits_e^{+\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \left(-\frac{1}{2\ln^2 x}\right)\Bigg|_e^{+\infty} = \frac{1}{2}.\ \text{Интеграл сходится.}\triangleright$$

6.415.

$$\triangleleft\ \int\limits_0^{+\infty}\frac{x\,dx}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty}\frac{d(x^2+4)}{x^2+4} = \frac{1}{2}\left(\ln(x^2+4)\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2}\lim_{x\to+\infty}\ln(x^2+4)-\ln 2;\ \text{расходится.}\ \triangleright$$

Признак сравнения : пусть при $a\leqslant x<+\infty\quad 0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$. Если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, а если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то расходится и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$.

Для сравнения обычно используют интегралы $\int\limits_a^{+\infty}\frac{dx}{x^q}$, которые сходятся при $q>1$.

Признак эквивалентности : если при $a\leqslant x<+\infty\quad f(x)>0$, $g(x)>0$ — бесконечно малые одинакового порядка при $x\to+\infty$, то интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Признак абсолютной сходимости : если сходится $\int\limits_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$, то сходится и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ (последний интеграл при этом называется абсолютно сходящимся).

Исследовать на сходимость интегралы:

6.426. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1}\,dx.$

$$\triangleleft\ \frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{x^2+1}}{x^3+3x+1} = \frac{\sqrt{x^3}\left(1+\sqrt{1/x+1/x^3}\right)}{x^3+3x+1} \sim \frac{\sqrt{x^3}}{x^3} = \frac{1}{x^{3/2}}.$$

Поскольку $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{3/2}}\,dx$ сходится, т.к. $q = 1.5 > 1 \Rightarrow$ исходный интеграл сходится по признаку сравнения

6.428. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$

$\triangleleft\ \dfrac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}} \geqslant \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}$. Поскольку $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ рассходится, т.к. $q = 1/3 < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ исходный интеграл рассходится по признаку сравнения. $\triangleright$

6.430. $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\,dx.$

$\triangleleft$ Применим признак абсолютной сходимости :

$\left|\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\right| \leqslant \dfrac{1}{2+x\sqrt{x}} < \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$. Поскольку $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{1}{x^{3/2}}\,dx$ сходится, т.к. $q = 1.5 > 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ исходный интеграл сходится абсолютно по признаку сравнения. $\triangleright$

6.432. $\int\limits_{e^2}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\ln\ln x}.$

$\triangleleft\ \int\limits_{e^2}^{+\infty} \dfrac{dx}{x\ln\ln x} = \int\limits_{e^2}^{+\infty} \dfrac{d\ln x}{\ln\ln x} = \int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dt}{\ln t} > \int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dt}{t}$ – данный интеграл расходится $\Rightarrow$
исходный интеграл расходится по признаку сравнения. $\triangleright$

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b)$ (или на $(a,b]$) и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$ (или $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$). По определению *несобственный интеграл второго рода* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{c\to b-0} \int\limits_a^c f(x)\,dx$ (или $\lim\limits_{c\to a+0} \int\limits_c^b f(x)\,dx$). Если этот предел существует, говорят, что интеграл *сходится*, в противном случае он *расходится.*

В случае, когда точка разрыва $c \in (a,b)$,

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{d\to c-0} \int\limits_a^d f(x)\,dx + \lim_{e\to c+0} \int\limits_e^b f(x)\,dx.$$

Признаки сходимости для интегралов второго рода аналогичны призакам для интегралов первого рода. Для сравнения используются интегралы $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^q}$ и $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-b)^q}$, которые сходятся при $q<1$.

В следующих задачах вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

6.433. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4}$.

$$\triangleleft \int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+x^4} = \int\limits_0^1 \frac{1+x^2-x^2}{x^2+x^4}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx - \int\limits_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_0^1 - (\operatorname{arctg} x)|_0^1\,;$$

интеграл расходится. $\triangleright$

6.441. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$.

$$\triangleleft \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1/4-(x-1/2)^2}}\,dx = \arcsin(2x-1)|_0^1\,;$$

интеграл сходится. $\triangleright$

Исследовать на сходимость интегралы:

6.443. $\int\limits_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$.

$\triangleleft$ Точка разрыва 1.

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)(1+x^2)}} = \frac{x^2}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}} \sim \frac{1}{\sqrt{4(1-x)}}.$$

Поскольку $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{4(1-x)}}\,dx$ сходится $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ исходный интеграл сходится по предельному признаку сравнения. $\triangleright$

6.449. $\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$.

$\triangleleft$ Точка разрыва 0. Преобразуем интеграл интегрированием по частям :

$$\int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = \begin{vmatrix} u = \ln x \\ v = 2\sqrt{x} \end{vmatrix} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_0^1 - 2\int\limits_0^1 \sqrt{x}\cdot\frac{dx}{x} = 2\sqrt{x}\ln x\Big|_0^1 - 4\,\sqrt{x}\Big|_0^1 =$$

$$= 0 - 2\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x - (4-0) = -2\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x - 4;$$

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-\frac{1}{2}x^{-3/2}} = \lim_{x\to 0}(-2\sqrt{x}) = 0; \quad \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx = -4.$$ Интеграл сходится.$\triangleright$

6.451. $\int\limits_{-1}^{0}\frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx.$

$\triangleleft$ Точка разрыва 0. Сделаем замену переменной в несобственном интеграле :

$$\int\limits_{-1}^{0}\frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \lim_{b\to -0}\int\limits_{-1}^{b}\frac{e^{1/x}}{x^3}\,dx = \begin{vmatrix} x = \ 1/t \\ t = \ 1/x \end{vmatrix} = \lim_{b\to -0}\int\limits_{-1}^{1/b} t^3e^t\cdot\frac{-dt}{t^2} = -\int\limits_{-1}^{-\infty} te^t\,dt = \int\limits_{-\infty}^{-1} te^t\,dt =$$

$$= \begin{vmatrix} u = \ t \\ v = \ e^t \end{vmatrix} = te^t\big|_{-\infty}^{-1} - \int\limits_{-\infty}^{-1} e^t\,dt = te^t\big|_{-\infty}^{-1} - e^t\big|_{-\infty}^{-1} = -e^{-1} - \lim_{t\to -\infty} te^t - (e^{-1} - \lim_{t\to -\infty} e^t) =$$

$$= -2e^{-1} - \lim_{t\to -\infty}\frac{t}{e^{-t}} = -2e^{-1} - \lim_{t\to -\infty}\frac{1}{-e^{-t}} = -2e^{-1}.\ \triangleright$$

Замечание: в задачнике ошибка в ответе на этот пример.