

Занятие 12. Вычисление объёмов тел по известным площадям поперечных сечений и объёмов тел вращения. Приложения определённого интеграла в физике.

Если площадь $S(x)$ сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox , является непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$, то объём тела вычисляется по формуле $V = \int_a^b S(x) dx$.

Объём тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и осью Ox , вокруг оси Ox

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

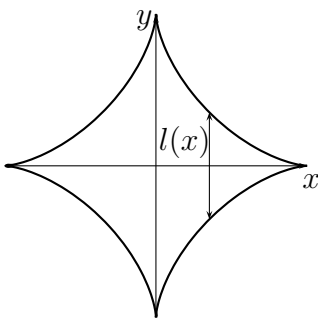
Объём тела, образованного вращением криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$, $0 < a < b$ и осью Ox , вокруг оси Oy

$$V_y = 2\pi \int_a^b x|f(x)| dx.$$

Объём тела, образованного вращением криволинейного сектора, ограниченного кривой $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$, вокруг полярной оси

$$V = \frac{2}{3}\pi \int_\alpha^\beta r^3 \sin \varphi d\varphi.$$

6.533. Найти объём тела, основание которого — область плоскости Oxy , ограниченная астроидой $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$, а сечение плоскостью, перпендикулярной оси Ox , есть квадрат.



◁ Сечение плоскостью $x = x(t_0)$ — квадрат со стороной $l = 2y(t_0)$.

Тело состоит из двух симметричных частей (справа и слева от оси Oy). Объём половины тела

$$\frac{1}{2}V = \int_0^a l^2(x) dx = \int_{\pi/2}^0 4y^2(t)x'(t) dt = -4 \int_{\pi/2}^0 3a^3 \sin^7 t \cos^2 t dt =$$

$$= 12a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^7 t \cos^2 t dt = -12a^3 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 t)^3 \cos^2 t d(\cos t) =$$

$$= -12a^3 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 t - 3 \cos^4 t + 3 \cos^6 t - \cos^8 t) d(\cos t) =$$

$$= -12a^3 \left(\frac{1}{3} \cos^3 t - \frac{3}{5} \cos^5 t + \frac{3}{7} \cos^7 t - \frac{1}{9} \cos^9 t \right) \Big|_0^{\pi/2} = -12a^3 \left(-\frac{1}{3} + \frac{3}{5} - \frac{3}{7} + \frac{1}{9} \right) = \frac{64}{105} a^3;$$

$$V = \frac{128}{105} a^3. \triangleright$$

6.535. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $2y = x^2$ и $2x + 2y - 3 = 0$.

◁ Найдём точки пересечения кривых:

$$\begin{cases} 2y = x^2 \\ 2x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow$$

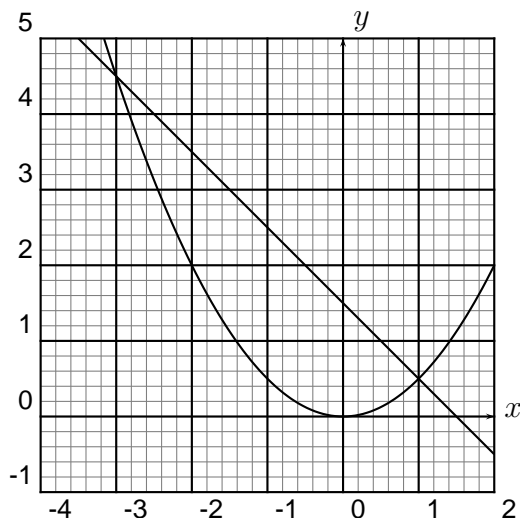
$$x = -3 \text{ или } x = 1.$$

$$V = \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{3}{2} - x\right)^2 dx - \pi \int_{-3}^1 (x^2/2)^2 dx =$$

$$= \pi \int_{-3}^1 \left(\frac{9}{4} - 3x + x^2\right) dx - \frac{\pi}{4} \int_{-3}^1 x^4 dx =$$

$$= \pi \left(\frac{9}{4}x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{20}x^5\right) \Big|_{-3}^1 =$$

$$= \pi \left(\frac{31}{30} + \frac{171}{10}\right) = \frac{272}{15}\pi.$$



6.536. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-2x} - 1$, $y = e^{-x} + 1$ и $x = 0$.

◁ Найдём точку пересечения кривых:

$$\begin{cases} y = e^{-2x} - 1 \\ y = e^{-x} + 1 \end{cases} \Rightarrow e^{-2x} - e^{-x} - 2 = 0 \Rightarrow e^{-x} = 2 \text{ или } e^{-x} = -1.$$

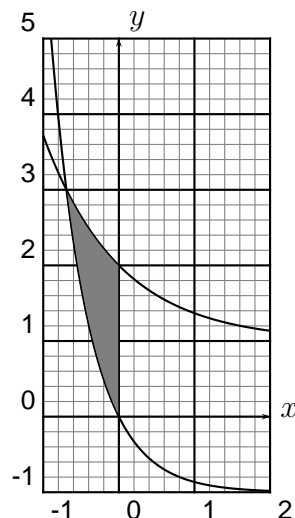
Точка пересечения $x = -\ln 2$.

$$V = \pi \int_{-\ln 2}^0 (e^{-x} + 1)^2 dx - \pi \int_{-\ln 2}^0 (e^{-2x} - 1)^2 dx =$$

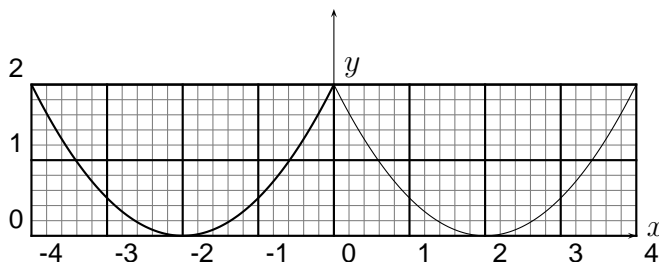
$$= \pi \int_{-\ln 2}^0 (e^{-2x} + 2e^{-x} + 1 - e^{-4x} + 2e^{-2x} - 1) dx =$$

$$= \pi \int_{-\ln 2}^0 (3e^{-2x} + 2e^{-x} - e^{-4x}) dx = \pi \left(-\frac{3}{2}e^{-2x} - 2e^{-x} + \frac{1}{4}e^{-4x}\right) \Big|_{-\ln 2}^0 =$$

$$= \pi \left(-\frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{4} + 6 + 4 - 4\right) = \frac{11}{4}\pi.$$



6.538. Найти объём тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$ и $y = 2$.



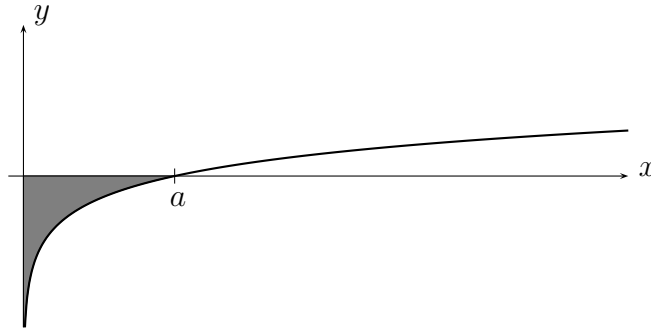
◁ Найдём точки пересечения кривых:

$$\begin{cases} y = x^2/2 + 2x + 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow x = -4 \text{ или } x = 0.$$

Искомый объём может быть получен как разность объёмов цилиндра радиуса 4 высоты 2 и тела, полученного вращением криволинейной трапеции, образованной кривой $y = \frac{x^2}{2} - 2x + 2$ (симметричной исходной кривой относительно оси Oy) и прямыми $x = 0, x = 4$ вокруг оси Oy :

$$V = 32\pi - 2\pi \int_0^4 x \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 2 \right) dx = 32\pi - 2\pi \left(\frac{1}{8}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + x^2 \right) \Big|_0^4 = 32\pi - \frac{32}{3}\pi = \frac{64}{3}\pi.$$

6.540. Найти объёмы тел, образованных вращением фигуры, ограниченной кривой $x = at^2$, $y = a \ln t$ ($a > 0$) и осями координат, вокруг а) оси Ox ; б) оси Oy .

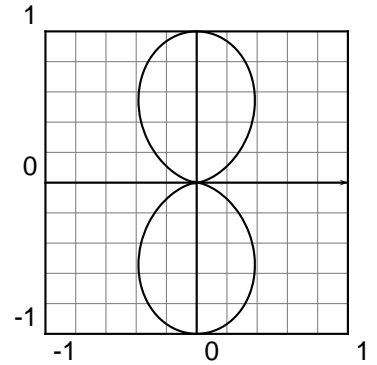


$$\begin{aligned} \triangleleft \text{ а) } V_x &= \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^1 y^2(t)x'(t) dt = \pi a^3 \int_0^1 \ln^2 t \cdot 2t dt = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 t \\ v = t^2 \end{array} \right| = \\ &= \pi a^3 \left(t^2 \ln^2 t \Big|_0^1 - \int_0^1 t^2 \cdot 2 \ln t \cdot \frac{dt}{t} \right) = \left| \begin{array}{l} u = \ln t \\ v = t^2 \end{array} \right| = \pi a^3 \left(t^2 \ln^2 t \Big|_0^1 - t^2 \ln t \Big|_0^1 + \int_0^1 t^2 \cdot \frac{dt}{t} \right) = \\ &= \pi a^3 \left(t^2 \ln^2 t \Big|_0^1 - t^2 \ln t \Big|_0^1 + \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 \right) = \pi a^3 \left(\frac{1}{2} - \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 \ln^2 t) - \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 \ln t) \right); \\ \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 \ln t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln t}{1/t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1/t}{-2/t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{-2} = 0; \\ \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 \ln^2 t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln^2 t}{1/t^2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(2 \ln t)/t}{-2/t^3} = - \lim_{t \rightarrow 0} (t^2 \ln t) = 0; \quad V_x = \frac{\pi a^3}{2}. \triangleright \end{aligned}$$

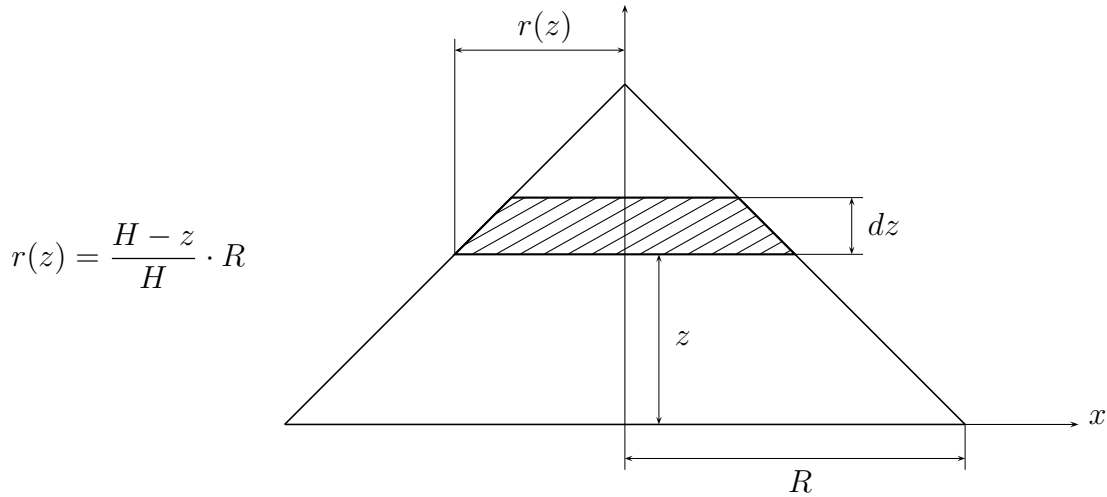
$$\triangleleft \text{ б) } V_y = \pi \int_{-\infty}^0 x^2 dy = \pi \int_0^1 x^2(t)y'(t) dt = \pi a^3 \int_0^1 t^3 dt = \pi a^3 \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{\pi a^3}{4}. \triangleright$$

6.543. Найти объём тела, образованного вращением кривой $r = a \sin^2 \varphi$ вокруг полярной оси.

$$\begin{aligned} \triangleleft \frac{1}{2}V &= \frac{2}{3}\pi \int_0^{\pi/2} r^3 \sin \varphi d\varphi = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^7 \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6 \varphi d(\cos \varphi) = \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/2} (\cos^2 \varphi - 1)^3 d(\cos \varphi) = \\ &= \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\pi/2} (\cos^6 \varphi - 3\cos^4 \varphi + 3\cos^2 \varphi - 1) d(\cos \varphi) = \\ &= \frac{2}{3}\pi a^3 \left(\frac{1}{7} \cos^7 \varphi - \frac{3}{5} \cos^5 \varphi + \cos^3 \varphi - \cos \varphi \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\ &= -\frac{2}{3}\pi a^3 \left(\frac{1}{7} - \frac{3}{5} + 1 - 1 \right) = \frac{32\pi a^3}{105}; \quad V = \frac{64}{105}\pi a^3. \triangleright \end{aligned}$$



6.560. Вычислить работу, которую надо затратить, чтобы насыпать кучу песка конической формы с радиусом основания R и высотой H . Плотность песка γ .



$$r(z) = \frac{H - z}{H} \cdot R$$

\triangleleft Рассмотрим кучу как состоящую из бесконечно большого количества бесконечно тонких горизонтальных слоёв толщины dz и т.д. Работа, необходимая для поднятия слоя, находящегося на высоте z ,

$$dA = dm \cdot g \cdot z = \gamma g z dV = \gamma \pi r^2(z) g z dz = \gamma \pi \frac{(H - z)^2}{H^2} R^2 g z dz = \gamma \pi R^2 g \left(z - \frac{2z^2}{H} + \frac{z^3}{H^2} \right) dz.$$

Работа, необходимая для поднятия всей кучи,

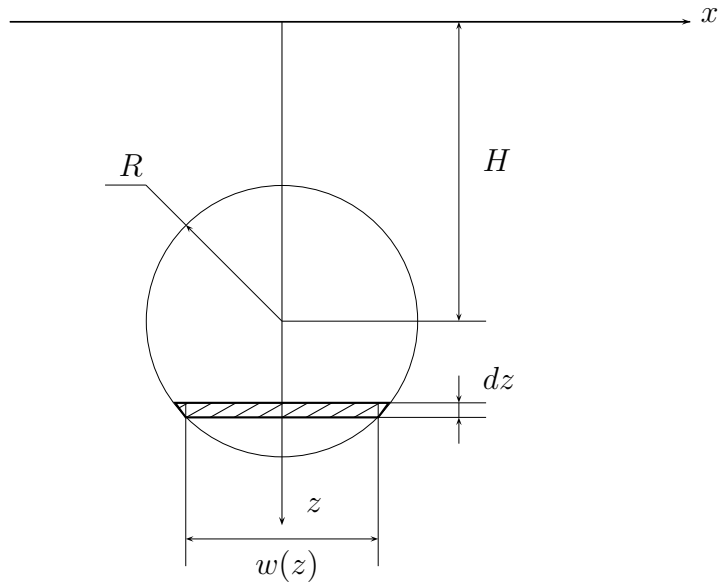
$$A = \int_0^H \gamma \pi R^2 g \left(z - \frac{2z^2}{H} + \frac{z^3}{H^2} \right) dz = \gamma \pi R^2 g \left(\frac{z^2}{2} - \frac{2z^3}{3H} + \frac{z^4}{4H^2} \right) \Big|_0^H = \frac{1}{12} g \gamma \pi R^2 H^2. \triangleright$$

6.573. Конец трубы, погруженной в жидкость плотности γ , закрыт круглой заслонкой. Определить силу давления на заслонку, если её радиус R , а центр тяжести находится на глубине H . (Сила Паскаля: $F = \gamma g H S$.)

$$\triangleleft \left(\frac{w(z)}{2}\right)^2 + (z - H)^2 = R^2$$

$$\left(\frac{w(z)}{2}\right)^2 = R^2 - (z - H)^2$$

$$w(z) = 2\sqrt{R^2 - (z - H)^2}$$



$$dF = \gamma g z dS = \gamma g z w(z) dz = \gamma g z \cdot 2\sqrt{R^2 - (z - H)^2} dz$$

$$F = 2\gamma g \int_{H-R}^{H+R} z\sqrt{R^2 - (z - H)^2} dz = \left| \begin{matrix} R \sin t = z - H \\ t = \arcsin\left(\frac{z-H}{R}\right) \end{matrix} \right| = 2\gamma g \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (H + R \sin t) R \sqrt{1 - \sin^2 t} R \cos t dt =$$

Здесь обратим внимание на то, что $\cos t \geq 0$

$$= 2\gamma g R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (H + R \sin t) \cos^2 t dt = 2\gamma g R^2 H \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t dt + 2\gamma g R^3 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin t \cos^2 t dt =$$

Второй интеграл равен нулю (от нечётной функции)

$$= 2\gamma g R^2 H \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \gamma g R^2 H \int_{-\pi/2}^{\pi/2} dt + \gamma g R^2 H \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos 2t dt =$$

$$= \gamma g R^2 H t \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} + \gamma g R^2 H \frac{\sin 2t}{2} \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi \gamma g R^2 H. \triangleright$$