Док-во

Необ. Пусть X и Y независимые, тогда $F_{XY}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

$$f_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x \, \partial y} = \frac{\partial^2 (F_X(x) \cdot F_Y(y))}{\partial x \, \partial y} =$$

$$= \frac{dF_X(x)}{dx} \cdot \frac{dF_Y(y)}{dy} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$$

Дост.

$$F_{XY}(x,y) = \iint\limits_{-\infty\,-\infty} f_{XY}(u,v)\,du\,dv = \int\limits_{-\infty} f_X(u)\,du \int\limits_{-\infty} f_Y(v)\,dv = F_X(x) F_Y(y)$$

зач?

Утверждение (б/д)

Дискретные случайные величины X и Y являются независимыми т и т т, тогда $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} = P_{X_i} P_{Y_j}$ $\forall i, j$

Определение

Случайные величины $X_1, \dots X_n$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве, называют независимыми в совокупности, если $F_{X_1 \dots X_n}(x_1, \dots x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot F_{X_n}(x_n)$

Функции от случайных величин

Пусть на вероятностном пр-ве (Ω, β, P) задана случайная величина $X(\omega)$. Рассмотрим действительную ф-цию $y = Y(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Определение

Случайную величину Y, которая каждому элементарному исходу со ставит в соответствие число

$Y(\omega) = Y(X(\omega))$

называют функцией $Y(X)$ от скалярной случайной величины X.

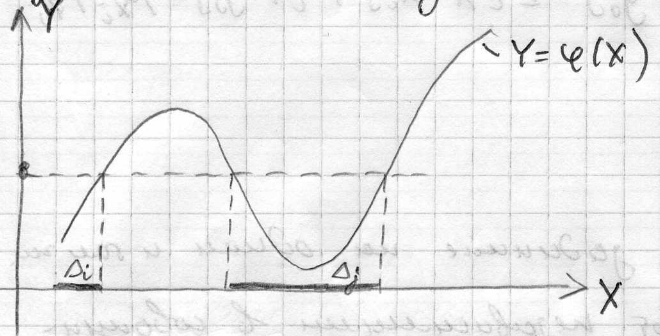
Замечание

Функция $Y=Y(x)$ от дискретной СВ так же будет дискретной СВ, а ф-ция от непрерывной СВ может быть как непрерывной, так и дискретной. (про раз ф-ции).

Рассмотрим, как найти $F_Y(y)$, если известна $f_X(x)$.

По определению $F_Y(y) = P\{Y<y\} = P\{Y(X(\omega))<y\}$

Событие $\{Y(X(\omega))<y\}$ эквивалентно событию $\bigcup\limits_k \{X(\omega)\in\Delta_k\}$, где Δ_k непересекающиеся промежутки у $\mathbb{R}$. (поскольку на множестве элем-ых исходов из $\{Y(X(\omega))<y\}$ СВ $X(\omega)$ будет принимать свои значения на нек-ой совокупности $\{\Delta_k\}$)



Тогда по расширенной аксиоме сложения

$$F_Y(y) = P\{Y(X(\omega))<y\} = \sum_k P\{X(\omega_k)\in\Delta_k\} =$$

$$= \sum_k \int_{\Delta_k} f_X(x)\,dx = \int_{\Delta} f_X(x)\,dx, \quad \text{где } \Delta = \bigcup_k \Delta_k$$

(Сумма, вообще говоря, может быть бесконечной.)

Т.к. $\bigcup\limits_k\{\Delta_k\} = \Delta$ определено как мн-во тех значений $X(\omega)$, для которых $Y(X(\omega))<y$, то получаем:

$$F_Y(y) = \int\limits_{Y(x)<y} f_X(x)\,dx$$

← интегрирование по всем x, для которых $Y(x)<y$.

Пример

Пусть $X\sim \mathcal{N}(0,1)$. $Y=X^2$ тогда

$$F_Y(y) = \int\limits_{Y(x)<y} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{x^2<y} e^{-x^2/2}\,dx$$

Т.к. при $y\le 0$ $\nexists x\in\mathbb{R}: x^2<y\le 0$, то $F_Y(y)=0$ при $y\le 0$

При $y>0$ $x^2<y \Rightarrow -\sqrt{y}<x<\sqrt{y}$, тогда

$$F_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-x^2/2}\, dx = 2\,\Phi_0(\sqrt{y})$$

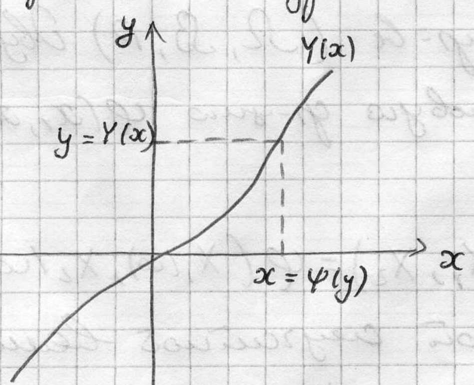
Т.к. $f(x)=\frac{dF(x)}{dx}$, то сделав замену $x^2=t$ имеем

$$y>0 \quad f_Y(y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^y \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{t}}\, dt \right)' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, y} e^{-y/2}$$

$$\text{Т.о.} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, y} e^{-y/2} & y>0 \end{cases}$$

Т.о. СВ $Y = X^2(\omega)$ где $X \sim N(0,1)$ имеет распределение „Хи-квадрат" с одной степенью свободы.

Рассмотрим частный случай, предположив, что $Y(x)$ является непрерывной возрастающей (убывающей) функцией. Тогда



$\exists$ обратная ф-ция $x=\psi(y)=\varphi^{-1}(y)$ и событие $\{Y(X(\omega))<y\}$ эквивалентно событию $\{X(\omega)<\psi(y)\}$ для возрастающей ф-ции ($\{X(\omega)>\psi(y)\}$ для убывающей).

Тогда $P\{Y(X)<y\} = P\{X<\psi(y)\}$ для $Y(x)\uparrow$ и

$P\{Y(X)<y\} = P\{X>\psi(y)\}$ для $Y(x)\downarrow$

Тогда $F_Y(y) = P\{Y<y\} = P\{X<\psi(y)\} = F_X(\psi(y))$ или

$F_Y(y) = P\{Y<y\} = P\{X>\psi(y)\} = 1 - F_X(\psi(y))$ если $\varphi(x)\downarrow$

Тогда $f_Y(y) = F_Y'(y) = (F_X(x))'\Big|_{x=\psi(y)} \cdot \psi'(y) = f_X(\psi(y))\,\psi'(y)$ если $\varphi(x)\uparrow$

и $f_Y(y) = F_Y'(y) = -(F_X(x))'\Big|_{x=\psi(y)} \psi'(y) = -f_X(\psi(y))\,\psi'(y)$ если $\varphi(x)\downarrow$

В общем случае можно записать

$$f_Y(y) = f_X(\psi(y))\,|\psi'(y)|$$

Если $Y(x)$ является непрерывной кусочно монотонной функцией, то

$$f_Y(y) = \sum_{i=1}^{k} f_X(\psi_i(y)) |\psi_i'(y)|,$$

где k – кол-во участков монотонности.

Скалярная функция от случайного векторного аргумента

Скалярную ф-цию от случайного векторного аргумента будем определять так же, как и ф-цию от одномерной случайной величины. Для простоты рассмотрим 2-мерный случайный вектор

Рассмотрим на вероятностном пр-ве $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ двумерный случайный вектор (X_1, X_2) и числовую ф-цию $\varphi(x_1, x_2)$

Определение

Случайную величину $Y = \varphi(X_1, X_2) = \varphi(X_1(\omega), X_2(\omega))$ наз-ют функцией от двумерной случайной величины (двумерного случайного вектора) (X_1, X_2)

Функция $Y = \varphi(X_1, X_2)$ от двумерной дискретной случайной величины (X_1, X_2) является дискретной СВ, принимающей значения $Y = \varphi(x_{1i}, x_{2j})$ с вероятностью $p_{ij} = P\{X_1 = x_{1i}, X_2 = x_{2j}\}$

Пример

Пусть Y – СВ, равная суммарному числу успехов в 2х испытаниях по схеме Бернулли, а X_i – число успехов в i-ом испытании $(i=1,2)$. Тогда

$Y = X_1 + X_2$ и множество ее возможных значений: 0, 1, 2, причем $Y = 1$ тогда либо $X_1 = 1$ и $X_2 = 0$ либо $X_1 = 0$ и $X_2 = 1$. Тогда ряд распределения СВ Y имеет вид:

Y	0	1	2
p	q^2	$2pq$	p^2

где $q = 1 - p$

Если (X_1, X_2) - двумерная непрерывная случайная величина с плотностью распределения $f_{X_1X_2}(x_1 x_2)$, функцию распределения случайной величины $Y = \varphi(X_1, x_2)$ можно найти по формуле

$$F_Y(y) = \iint\limits_{\varphi(x_1 x_2) < y} f_{X_1X_2}(x_1 x_2)\,dx_1 dx_2$$

где область интегрирования состоит из всех значений $(x_1 x_2)$ для которых $\varphi(x_1 x_2) < y$.

Пример

Пусть $(X_1 X_2)$ - двумерный случ-ый вектор, имеющий стандартное нормальное распределение т.е $f_{X_1X_2}(x_1 x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}$.

$Y = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, найти $F_Y(y)$-?

В данном случае $\varphi(x_1 x_2) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Очевидно, что при $y \le 0$ $F_Y(y) = 0$. При $y > 0$ имеем:

$$F_Y(y) = \iint\limits_{\sqrt{x_1^2+x_2^2} < y} \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)}\,dx_1 dx_2 = \left| \begin{matrix} x_1 = \rho\cos\varphi \\ x_2 = \rho\sin\varphi \\ J = \rho \end{matrix} \right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^y \rho e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho =$$

$$= 1 - e^{-y^2/2}$$

т.о $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0, \\ 1 - e^{-y^2/2} & y > 0 \end{cases}$

Формула свертки

Пусть X_1 и X_2 - независимые случайные величины и $Y = X_1 + X_2$, т.е $\varphi(x_1, x_2) = x_1 + x_2$.

т.к X_1 и X_2 независимые, то $f_{X_1X_2}(x_1 x_2) = f_{X_1}(x_1) \cdot f_{X_2}(x_2)$

тогда $F_Y(y) = \iint\limits_{x_1+x_2<y} f_{X_1X_2}(x_1 x_2)\,dx_1 dx_2 = \iint\limits_{x_1+x_2<y} f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)\,dx_1 dx_2 =$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_1}(x_1)dx_1 \int_{-\infty}^{y-x_1} f_{X_2}(x_2)dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{X_2}(y-x_1) f_{X_1}(x_1)dx_1$$

Тогда $f_Y(y) = \dfrac{dF(y)}{dy} = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2}(y-x) f_{X_1}(x)dx$ (где $x = x_1$)

$\boxed{\text{т.к. } I'(y) = \int_a^b f'_y(x,y)dx \text{ где } I(y) = \int_a^b f(x,y)dx}$

т.о. $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{X_2}(y-x) f_{X_1}(x)dx = f_{X_2}(x_2) * f_{X_1}(x_1)$ –

– формула свертки

Пусть теперь $(Y_1\ Y_2) = \varphi(X_1\ X_2)$ т.е мы имеем дело с векторной ф-цией от случайного векторного аргумента. Можно показать, что верна следующая формула:

$$F_{Y_1Y_2}(y_1, y_2) = \iint\limits_{\substack{\varphi_1(x_1,x_2) < y_1 \\ \varphi_2(x_1,x_2) < y_2}} f_{X_1X_2}(x_1\,x_2)\,dx_1\,dx_2 ,$$

где $f_{X_1X_2}(x_1, x_2)$ – совместная плотность распределения СВ X_1 и X_2.

$\varphi(x_1\,x_2) = (\varphi_1(x_1\,x_2), \varphi_2(x_1\,x_2))^T$