

Московский государственный технический
университет имени Н.Э. Баумана

А.Ю. Чирков

Учебное пособие

ВВЕДЕНИЕ В ФИЗИКУ ПЛАЗМЫ

**(ЭЛЕКТРОННЫЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
ПО ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ)**

Москва
2011

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ ...	5
1.1. Определение плазмы. Степень ионизации. Квазинейтральность	5
1.2. Дебаевское экранирование зарядов. Дебаевский радиус	6
1.3. Плазменные ленгмюровские колебания	7
1.5. Потенциал ионизации	10
Задачи	11
2. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ	12
2.1. Уравнения движения. Вводные замечания	12
2.2. Стационарное однородное магнитное поле	12
2.3. Дрейф в скрещенных электрическом и магнитном полях и дрейф под действием постоянной силы, перпендикулярной магнитным силовым линиям	14
2.4. Расчет коэффициентов переноса по параметрам траекторий	16
2.5. Дрейф в неоднородном магнитном поле	18
2.6. Инерционный дрейф	21
2.7. Адиабатический инвариант μ – магнитный момент	22
Задачи	23
3. МАГНТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛАЗМЫ	25
3.1. Уравнения магнитной гидродинамики	25
3.2. Равновесие плазмы в магнитном поле. Параметр бета	26
3.3. Диамагнитный дрейф плазмы	28
3.4. Амбиполярная диффузия	29
3.5. Взаимная диффузия магнитного поля и плазмы	31
Задачи	32
4. КИНЕТИКА ПЛАЗМЫ	33
4.1. Кинетическое уравнение. Интеграл столкновений Больцмана. Функция распределения Максвелла–Больцмана	33
4.2. Формула Больцмана	35
4.3. Кулоновские столкновения в полностью ионизированной плазме. Кулоновский логарифм. Уравнение Фоккера–Планка	36
4.4. Кинетическое уравнение Власова	41
Задачи	42
5. ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ	43
5.1. Методы анализа волн и неустойчивостей	43
5.2. Электронные плазменные волны. Затухание Ландау	45
5.3. Звуковые волны в нейтральном газе и ионно-звуковые волны в плазме ...	50
5.4. Альфвеновские волны	52
5.5. Магнитозвуковые волны	54
5.6. Неустойчивые дрейфовые волны в неоднородной плазме с магнитным полем	55
Цитированная литература	59
ЛИТЕРАТУРА для самостоятельного изучения курса	60

ВВЕДЕНИЕ

Плазма – четвертое состояние вещества. Плазма состоит из ионов, электронов и (в общем случае) нейтральных частиц. Практически все вещество во Вселенной находится в состоянии плазмы (вещество звезд, межзвездный газ). Ядро Земли и верхние слои атмосферы Земли также рассматриваются как плазма.

Цель настоящего пособия состоит в том, чтобы в компактной форме изложить основные положения физики плазмы и особенности законов электродинамики, термодинамики, статистической физики, теории тепло-массообмена и механики применительно к высокотемпературной плазме, знание которых необходимо для дальнейшего изучения газовых разрядов, низкотемпературной плазмы, теплопереноса в турбулентной плазме, процессов в термоядерной плазме.

Физика плазмы тесным образом связана с такими областями знаний, как космическая физика, астрофизика. В физике твердого тела, электронике существует понятие «плазма твердого тела», характеризующее состояние электронного газа, а также газа заряженных квазичастиц. В последнее время получила развитие физика пылевой плазмы, изучающая поведение систем заряженных микрочастиц – «пылинок».

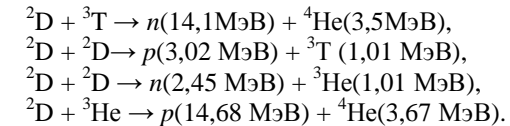
Ниже приведены характерные значения концентрации заряженных частиц n и температуры плазмы T :

	$n, \text{м}^{-3}$	$T, \text{К}$
Межзвездный газ	10^6	10^2
Ионосфера	10^8-10^{12}	10^3
Солнечная корона	10^{13}	10^6
Солнечная атмосфера	10^{18}	10^4
Лабораторная плазма	$10^{18}-10^{24}$	до 10^8

Плазма используется в качестве рабочего вещества в таких технических устройствах, как газоразрядные лазеры, системы накачки лазеров, источники излучения, генераторы высокоэнтальпийных потоков (плазматроны), плазменные ускорители, космические электрореактивные двигатели, магнитогидродинамические преобразователи энергии. Плазма применяется в традиционных технологиях (плазменная резка и сварка), а также в нано-

технологиях для создания тончайших покрытий и модификации свойств поверхностей различных материалов.

Интенсивное развитие физики плазмы в XX веке было стимулировано исследованиями по управляемому термоядерному синтезу. Основные термоядерные реакции:



По существующим на сегодняшний день представлениям получить положительный выход энергии в стационарном термоядерном реакторе можно, только если термоядерная реакция протекает в высокотемпературной плазме достаточно высокой плотности ($n \sim 10^{20} \text{ м}^{-3}$), изолированной от стенок камеры магнитным полем. При этом среднее время удержания частицы в системе должно составлять нескольких секунд. Указанный подход носит названия магнитного удержания. Другой подход – инерциальный синтез, предполагающий реализацию периодически повторяющихся микровзрывов быстро разогреваемых мишеней. Для того, чтобы за время разлета мишени ($\sim 10^{-8} \text{ с}$) достичь необходимой полноты сгорания термоядерного топлива, требуется концентрация топлива $n \sim 10^{30} \text{ м}^{-3}$.

В физике плазмы удобной величиной для энергетических единиц (энергия, температура) является электронвольт (эВ). Энергия 1 эВ равна $1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$. Для температуры 1эВ соответствует 11605 К.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ СВОЙСТВА ПЛАЗМЫ

1.1. Определение плазмы. Степень ионизации. Квазинейтральность

Плазмой называют ионизированный газ, в котором суммарные заряды ионов и электронов равны.

В плазме присутствуют нейтральные и заряженные частицы. С одной стороны, плазма – газ, следовательно, для нее можно использовать уравнения состояния, аналогичные тем, что используются для нейтральных газов. С другой стороны, наличие заряженных частиц, порождающих электромагнитные поля и большое количество связанных с этим явлений, позволяет говорить о плазме как о четвертом состоянии вещества. Важная особенность плазмы заключается в том, что заряженные частицы плазмы участвуют как в индивидуальных, так и в коллективных взаимодействиях.

Количественной характеристикой ионизации является степень ионизации α . Для однократно ионизированной плазмы:

$$\alpha = \frac{n_i}{n_i + n_a}, \quad (1.1)$$

где n_i – концентрация ионов; n_a – концентрация нейтральных атомов.

При $\alpha = 1$ плазма называется *полностью ионизированной*. Необходимо также отметить, что в плазме могут содержаться ионы разной кратности ионизации (однократная ионизация – отрыв одного электрона, двукратная – двух электронов и т.д.).

Малое количество ионов и электронов содержится в воздухе (или в других газах) даже при комнатной температуре, но это ещё не означает, что воздух такой температуры можно рассматривать как плазму. Газ, содержащий заряженные частицы, считается плазмой, если заряженные частицы существенно влияют на его физические свойства, например, на электропроводность.

При наличии заряженных частиц суммарный электрический заряд плазм равен нулю, так как в физически малом объеме содержится достаточно большое число положительных и отрицательных заряженных частиц, экранирующих заряды друг друга. Из этого не следует строгое равен-

ство нулю плотности заряда в каждой точке пространства, занимаемого плазмой. Поэтому говорят, что плазма квазинейтральна. Условие квазинейтральности записывается следующим образом:

$$n_e = \sum_i Z_i n_i \quad (1.2)$$

где n_e – концентрация электронов, Z_i – заряды ионов.

Электрическое поле, создаваемое частицами плазмы, не равно нулю только вблизи зарядов, при этом макроскопическое электрическое поле равно нулю. Необходимо иметь в виду, что на малых пространственных масштабах плазма не является нейтральной.

1.2. Дебаевское экранирование зарядов. Дебаевский радиус

Масштабом, на котором нарушается нейтральность, является радиус Дебая r_D . Для оценки дебаевского радиуса используем уравнение Пуассона и формулу Больцмана:

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} = -\frac{\sum_i Z_i e n_i - e n_e}{\epsilon_0}, \quad (1.3)$$

$$n_e = n_{e0} \exp\left[\frac{e\Phi(r)}{k_B T_e}\right], \quad (1.4)$$

где Φ – электростатический потенциал; e – элементарный заряд; ϵ_0 – электрическая постоянная; n_{e0} – невозмущенная концентрация электронов; r – расстояние, которое отсчитывается от точки, в которой находится заряд (положительный ли отрицательный); k_B – постоянная Больцмана; T_e – температура электронов. Полагаем, что $|e\Phi| \ll k_B T_e$, тогда

$$n_e \approx n_{e0} \left(1 + \frac{e\Phi}{k_B T_e}\right). \quad (1.5)$$

Ионы гораздо тяжелее электронов, поэтому их можно считать неподвижными, и следовательно, $\sum_i Z_i n_i \approx n_{e0}$. Подставив это соотношение и (1.5) в уравнение Пуассона (1.3), получим

$$\frac{d^2\Phi}{dr^2} = \frac{e^2 n_{e0}}{\epsilon_0 k_B T_e} \Phi \quad (1.6)$$

Решение (1.6) быстро убывает с расстоянием согласно зависимости

$$\Phi(r) \propto \exp(-r/r_D), \quad (1.7)$$

где радиус Дебая равен

$$r_D = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_e e^2}}. \quad (1.8)$$

На расстояниях, больших дебаевского радиуса, заряд экранирован полем других зарядов. Таким образом, дебаевский радиус характеризует пространственный масштаб разделения зарядов в плазме.

1.3. Плазменные ленгмюровские колебания

При отклонении электронов на расстояние Δr от положения равновесия в поле зарядов плазмы на электроны действует электрическое поле, напряженность которого, согласно (1.3),

$$E = \frac{en_e}{\epsilon_0} \Delta r. \quad (1.9)$$

Это поле стремится вернуть электроны в положение равновесия.

Уравнение движения электрона имеет вид:

$$m_e \frac{d\Delta r}{dt} = -eE = -\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0} \Delta r, \quad (1.10)$$

где m_e – масса электрона.

Уравнение (1.10) описывает собственные колебания математического маятника с частотой

$$\omega_p = \sqrt{\frac{e^2 n_e}{\epsilon_0 m_e}}, \quad (1.11)$$

которая называется электронной плазменной (ленгмюровской) частотой. Частота ω_p характеризует масштаб времени разделения зарядов в плазме.

Частота ленгмюровских колебаний также может быть оценена из следующих соображений. За время порядка ω_p^{-1} электрон, имеющий теп-

ловую скорость $v_{Te} = \sqrt{k_B T_e / m_e}$, может сместиться на расстояние порядка r_D . Следовательно, $r_D = v_{Te} \omega_p^{-1}$, откуда может быть получено выражение (1.11).

1.4. Отличие плазмы от идеального газа. Особенности ближних и дальних столкновений

На практике для ионов и электронов плазмы используются уравнения состояния идеального газа в форме

$$p_\alpha = n_\alpha k_B T_\alpha, \quad (1.12)$$

где p_α – давление; $\alpha = i, e$ – сорт частиц. Суммарное давление плазмы равно сумме парциальных давлений ионов и электронов (а в общем случае еще и нейтральных частиц).

Вопрос о применимости к плазме законов идеального газа не является тривиальным из-за принципиальных различий в характере взаимодействий между частицами. Так как в плазме среднее расстояние между частицами l_0 намного меньше дебаевского радиуса r_D , каждая заряженная частица находится в непрерывном взаимодействии одновременно со многими частицами. В нейтральном идеальном газе взаимодействия (столкновения) частиц друг с другом или со стенками сосуда происходят практически мгновенно, а между двумя столкновениями частицы движутся свободно. В результате столкновения скорость частицы в газе изменяется значительно как по модулю, так и по направлению.

В отличие от парных столкновений в нейтральных газах в плазме частица непрерывно подвергается воздействию полей одновременно большого числа частиц, находящихся в дебаевской сфере, т.е. сфере дебаевского радиуса, окружающей заряд. Взаимодействия заряженных частиц в плазме условно подразделяют на ближние и дальние. В первом случае скорость частицы изменяет направление, так, что вектор скорости поворачивается на угол, больший $\pi/2$, во втором – меньший $\pi/2$.

Дальние взаимодействия (столкновения) слабо искривляют траекторию частицы. Ближние взаимодействия, сильно искривляющие траектории, относительно редки, следовательно, их можно рассматривать в приближении парных столкновений. При адекватном учете дальних столкновений можно считать, что значительно изменение скорости частицы по направлению и модулю происходит в результате достаточно редких парных столкновений, что похоже на ситуацию в идеальном газе.

Применять для плазмы законы идеального газ можно при условии, что средняя потенциальная энергия электростатического взаимодействия

частиц значительно меньше кинетической энергии их теплового движения, т.е.

$$k_B T \gg \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 l_0}. \quad (1.13)$$

Здесь для оценок полагается, что $T_i \approx T_e = T$, $Z_i \sim 1$. При сближении частиц на расстояние

$$l = \frac{e^2}{4\pi l_0 k_B T} \quad (1.14)$$

их потенциальная энергия равна тепловой энергии.

Для ближних столкновений прицельный параметр¹ имеет порядок l . Как отмечалось выше, близкие столкновения в плазме достаточно редки. Для дальних столкновений прицельный параметр много больше l . Следовательно, для частицы практически всегда (за исключением редких ближних столкновений) $l_0 \gg l$ и условие (1.13) для плазмы выполняется, т.е.

$$k_B T = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 l} \gg \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 l_0}. \quad (1.15)$$

Число заряженных частиц, заключенных в сфере с радиусом, равным дебаевскому радиусу r_D , составляет

$$N_D = \frac{4}{3} \pi r_D^3 n, \quad (1.16)$$

где n – концентрация заряженных частиц.

По величине плазменного параметра N_D судят о степени идеальности плазмы и применимости уравнения состояния (1.12). Для того чтобы ионизованный газ можно было считать плазмой, в дебаевской сфере должно содержаться большое число заряженных частиц. При этом $l \ll r_D$, $N_D \gg 1$, и такую плазму считают идеальной.

Если характерное время рассматриваемого процесса (например, период распространяющейся в плазме волны) значительно меньше времени

¹ Прицельный параметр – минимальное расстояние между прямыми, вдоль которых направлены векторы скоростей сталкивающихся частиц.

релаксации за счет кулоновских столкновений, то такую плазму называют бесстолкновительной.

Необходимо отметить, что взаимодействие двух заряженных частиц не всегда можно рассматривать в рамках классической электродинамики. Так, для описания движения электрона в кулоновском поле иона необходимо использовать квантовый подход, если кинетическая энергия электрона сравнима по величине или превосходит энергию электрона на первой бортовой орбите ($13,6Z^2$ эВ, где Z – заряд иона).

1.5. Потенциал ионизации

Как уже отмечалось в разделе 1.1, даже при низких температурах в газе присутствуют свободные электроны. Они появляются при столкновении наиболее быстрых частиц. Если к газу приложить достаточно сильное электрическое поле, то ускоряемые полем свободные электроны могут набрать кинетическую энергию, превосходящую потенциальную энергию связи электрона на внешней орбите в атоме. Следовательно, при столкновении ускоренного электрона с нейтральным атомом (молекулой) может произойти ионизация, т.е. отрыв электрона с внешней орбиты. Этот механизм называется *ионизацией электронным ударом*. В результате на один первоначально свободный электрон появляется еще один, далее эти два электрона выбивают еще два, затем происходит дальнейшее нарастание электронной лавины.

Минимальная энергия, которую необходимо сообщить электрону в атоме для перехода электрона в свободное состояние, называется *энергией ионизации*. Энергии ионизации, выраженной в электронвольтах, соответствует потенциал ионизации (в вольтах). Эти рассуждения относятся к однократной ионизации. Отрыву электрона от однократно заряженного иона соответствуют энергия и потенциал второй ионизации и т.д. потенциал ионизации атома водорода составляет 13,6 эВ. Потенциал двукратной ионизации для цезия составляет 23,5 эВ, а трехкратной – 33,4 эВ.

Ионизация при нагреве называется *термической ионизацией*. Степень термической ионизации определяется уравнением Саха, которое можно получить, если рассматривать ионизацию как реакцию превращения нейтрального атома в ион и электрон. Плазма также может образовываться при облучении фотонами (*фотоионизация*) и в результате других процессов.

Задачи

1.1. Оцените среднее расстояние между электронами l_e , дебаевский радиус r_D , плазменный параметр $N_D = \frac{4}{3}\pi r_D^3 n$, электронную ленгмюровскую частоту ω_p для следующих условий: а) межзвездный газ; б) ионосфера; в) солнечная корона; г) солнечная атмосфера; д) лабораторная плазма.

1.2. Плотность внутренней энергии в плазме в тепловом равновесии задана выражением

$$u = 3nk_B T \left[1 - \frac{\sqrt{8\pi}}{3} \alpha^{3/2} \right],$$

где $\alpha = \frac{n^{1/3} e^2}{4\pi\epsilon_0 k_B T}$ – малая величина, $n = n_i = n_e$. Согласно термодинамике, давление газа $p(T, V)$ удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{T} \right) = \frac{1}{T^2} \frac{\partial U}{\partial V},$$

где U – внутренняя энергия; V – объем. Докажите последнее соотношение, а затем покажите, что уточненное уравнение состояния плазмы имеет вид

$$p = 2nk_B T \left(1 - \frac{\sqrt{8\pi}}{3} \alpha^{3/2} \right)$$

Как можно интерпретировать физический смысл параметра α ?

2. ДВИЖЕНИЕ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ И МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ

2.1. Уравнения движения. Вводные замечания

Уравнения движения частицы с массой m и зарядом q под действием электростатической силы $F_E = qE$ и силы Лоренца $F_L = qv \times B$ имеют вид

$$m \frac{dv_x}{dt} = qE_x + q(v_y B_z - v_z B_y), \quad (2.1)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = qE_y + q(v_z B_x - v_x B_z), \quad (2.2)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = qE_z + q(v_x B_y - v_y B_x). \quad (2.3)$$

В стационарном однородном электрическом поле частица движется вдоль вектора напряженности \mathbf{E} с постоянным ускорением $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/m$.

В данном разделе анализируется движение частицы плазмы в заданных внешних полях без учета воздействия других частиц на рассматриваемую частицу, т.е. в так называемом одночастичном приближении.

2.2. Стационарное однородное магнитное поле

Пусть вектор индукции магнитного поля направлен вдоль оси z (рис. 2.1). Тогда уравнения движения (2.1) – (2.3) принимают вид

$$m \frac{dv_x}{dt} = qv_y B, \quad (2.4)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -qv_x B, \quad (2.5)$$

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0. \quad (2.6)$$

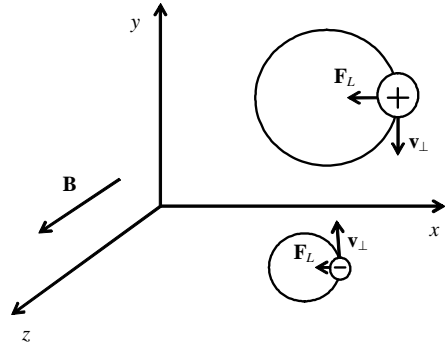


Рис. 2.1. Движение частиц в стационарном однородном магнитном поле ($v_{\parallel} = 0$)

Из (2.6) следует, что $v_z = v_{\parallel} = const$, так как нет сил, действующих вдоль магнитных силовых линий. На основе (2.1)–(2.3) можно сделать вывод о том, что магнитное поле и связанная с ним сила Лоренца не изменяют энергию частицы², следовательно, $v_{\perp}^2 = v_x^2 + v_y^2 = const$. Здесь и далее символы \parallel и \perp означают продольные и поперечные компоненты по отношению к вектору магнитного поля.

Чтобы проанализировать характер траектории, продифференцируем

$$(2.4) \text{ и, используя (2.5), получим } \frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dv_y}{dt} = -\frac{q^2 B^2}{m^2} v_x, \text{ или}$$

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_c^2 v_x = 0, \quad (2.7)$$

где

$$\omega_c = \frac{|q| B}{m} \quad (2.8)$$

– циклотронная частота. Решение имеет вид

$$v_x = \pm v_{\perp} \sin(\mp \omega_c t), \quad (2.9)$$

$$v_y = \mp v_{\perp} \cos(\mp \omega_c t), \quad (2.10)$$

² Необходимо иметь в виду, что переменное магнитное поле индуцирует электрическое поле, которое может изменять энергию частицы. Сила Лоренца не совершает работы, так как она перпендикулярна вектору скорости.

$$x = x_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos(\mp \omega_c t), \quad (2.11)$$

$$x = x_0 + \frac{v_{\perp}}{\omega_c} \cos(\mp \omega_c t), \quad (2.12)$$

где верхний знак (плюс или минус) соответствует решению для иона, нижний – для электрона.

Нетрудно видеть, что траектория представляет собой окружность радиуса

$$\rho_c = \frac{v_{\perp}}{\omega_c} = \frac{m v_{\perp}}{|q| B}. \quad (2.13)$$

Знак минус в (2.9) – (2.12) перед ω_c означает то, что положительная частица (ион) вращается по ходу часовой стрелки, в то время как положительным считается направление против хода часовой стрелки. Направление вращения определяется силой Лоренца (см. рис. 2.1).

Таким образом, в постоянном магнитном поле частица вращается вокруг линий магнитного поля. Такое вращение называют циклотронным, а радиус окружности ρ_c и частоту ω_c – циклотронным (ларморовским) радиусом и циклотронной (ларморовской) частотой соответственно.

2.3. Дрейф в скрещенных электрическом и магнитном полях и дрейф под действием постоянной силы, перпендикулярной магнитным силовым линиям

Пусть помимо стационарного однородного магнитного поля, вектор индукции которого \mathbf{B} параллелен оси z , в пространстве имеется также стационарное однородное электрическое поле, вектор напряженности которого \mathbf{E} перпендикулярен \mathbf{B} (рис. 2.2). Уравнения движения имеют вид

$$m \frac{dv_x}{dt} = q v_y B, \quad (2.14)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -q v_x B + q E, \quad (2.15)$$

$$v_z = v_{\parallel} = const. \quad (2.16)$$

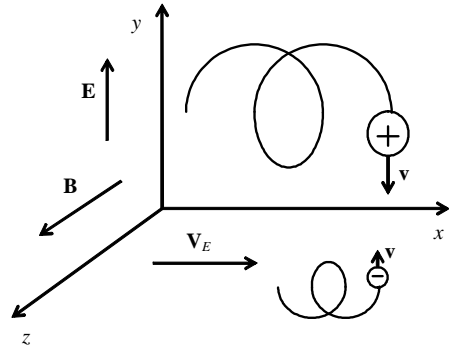


Рис.2.2. Дрейф частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях

Аналогично тому, как это было сделано в разделе 2.2 при выводе (2.7), из (2.14) и (2.15) получим

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega_c^2 v_x = \omega_c \frac{E}{B}, \quad (2.17)$$

откуда

$$v_x = \frac{E}{B} + v_{\perp} \sin(-\omega_c t). \quad (2.18)$$

Из (2.18) следует, что к циклотронному вращению частицы в магнитном поле добавляется еще движение (дрейф) центра ларморовской окружности (ведущего центра) вдоль оси x с постоянной скоростью $V_E = E/B$. Вектор скорости дрейфа в скрещенных электрическом и магнитном полях ($\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейф) перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы \mathbf{E} и \mathbf{B} . В общем случае вектор скорости $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфа определяется согласно выражению

$$\mathbf{V}_E = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (2.19)$$

Обратим внимание на то, что ионы и электроны дрейфуют в одном направлении с одинаковыми скоростями. Чтобы получить формулу для скорости дрейфа под действием постоянной силы \mathbf{F} , необходимо в формуле (2.19) заменить \mathbf{E} на \mathbf{F}/q . Тогда скорость дрейфа частицы поперек магнитного поля под действием постоянной силы

$$\mathbf{V}_F = \frac{\mathbf{F} \times \mathbf{B}}{qB^2}. \quad (2.20)$$

Если сила \mathbf{F} не зависит от знака заряда (например, сила тяжести), то электроны и ионы дрейфуют в противоположные стороны.

В данном разделе рассматривается движение отдельных частиц, двигающихся по дрейфовым траекториям так долго, как долго существуют поля. В плазме частица движется по определенной дрейфовой траектории до столкновения с другой частицей. В случае, если частица за время между двумя столкновениями τ успевает совершить несколько оборотов по циклотронной орбите, ее движение существенно зависит от индукции магнитного поля. В противном случае поле практически не влияет на движение частиц плазмы. Говорят, что электроны (ионы) замагничены при $\omega_{ce}\tau_e \gg 1$ ($\omega_{ci}\tau_i \gg 1$), что соответствует первому случаю. Параметр $h_e = \omega_{ce}\tau_e$ для электронов ($h_i = \omega_{ci}\tau_i$ – для ионов) называют параметром Холла. Таким образом, замагниченность является необходимым условием существования дрейфовых траекторий.

Необходимо подчеркнуть, что в дрейфовом приближении реальное движение частицы подразделяют на медленный дрейф ведущего центра и быстрое циклотронное вращение вокруг ведущего центра. Дрейфовое приближение выполняется не только в постоянных, но и в слабо меняющихся полях. Для применимости необходимо, чтобы поля слабо изменялись в пространстве на масштабах порядка ρ_c , а во времени – на масштабах порядка ω_c .

2.4. Расчет коэффициентов переноса по параметрам траекторий

Как было отмечено в разд. 2.1, в стационарном однородном электрическом поле частица движется вдоль вектора напряженности \mathbf{E} с постоянным ускорением $\mathbf{a} = q\mathbf{E}/m$. Учитывая столкновения, можно оценить классическую электронную проводимость плазмы без магнитного поля. Средняя скорость электрона на участке траектории между двумя столкновениями

$$\langle v_e \rangle \approx a v_e^{-1} = \frac{eE}{m_e v_e}, \quad (2.21)$$

где v_e — частота столкновений электронов. Плотность тока электронов

$$j_e = en_e \langle v_e \rangle = \frac{e^2 n_e}{m_e v_e} E. \quad (2.22)$$

Сравнивая это выражение с законом $j = \sigma E$, получаем значение классической электронной проводимости

$$\sigma_e^{\text{cl}} = \frac{e^2 n_e}{m_e v_e}. \quad (2.23)$$

Точно так же определяется проводимость электронного газа в металле. Для плазмы в магнитном поле выражение (2.23) представляет собой проводимость вдоль линий магнитного поля.

Эффект Холла, возникающий в проводниках, находящихся в магнитном поле (плазма является проводником), можно объяснить $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфом. Ток электронов, перпендикулярный векторам электрического и магнитного полей:

$$j_{\perp} = en_e V_E = \frac{en_e}{B} E, \quad (2.24)$$

откуда холловская проводимость поперек электрического и магнитного полей

$$\sigma_e^H = \frac{en_e}{B}. \quad (2.25)$$

Наличие проводимости поперек электрического поля связано с анизотропией плазмы в магнитном поле. Отношение электропроводностей электронов поперек и вдоль вектора магнитного поля:

$$\frac{\sigma_e^{\text{cl}}}{\sigma_e^H} = \frac{en_e}{B} \frac{m_e v_e}{e^2 n_e} = \frac{m_e v_e}{eB} = \frac{v_e}{\omega_{ce}}. \quad (2.26)$$

Анизотропия замагниченной плазмы приводит к тому, что коэффициенты переноса вдоль и поперек магнитных силовых линий существенно различаются, так как магнитное поле препятствует движению плазмы поперек магнитных силовых линий и почти никак не сказывается на движении вдоль линий. Классический коэффициент диффузии поперек магнитного поля D_{\perp} в этом случае можно оценить, если учесть, что при одном столкновении частица может смещаться на расстояние порядка ларморовского радиуса, и, следовательно,

$$D_{\perp i, e} = \rho_{ci, e}^2 v_{i, e}. \quad (2.27)$$

Отметим, что в установках для удержания плазмы магнитным полем коэффициенты диффузии, как правило, значительно выше классических. Это связано со сложной геометрией магнитного поля, а также с плазменной турбулентностью, возникающей при генерации в плазме неустойчивостей (неустойчивых волн).

2.5. Дрейф в неоднородном магнитном поле

Рассмотрим постоянное во времени неоднородное магнитное поле, изменяющееся в направлении, перпендикулярном вектору \mathbf{B} (рис. 2.3). Модуль индукции магнитного поля изменяется в направлении оси y по зависимости

$$B = B_0 + \frac{\partial B}{\partial y} y. \quad (2.28)$$

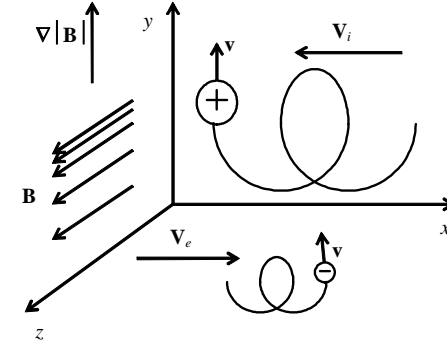


Рис. 2.3. Градиентный дрейф

Для применимости дрейфового приближения необходимо потребовать, чтобы магнитное поле слабо менялось на масштабе порядка циклотронного радиуса, т. е.

$$\frac{\partial B}{\partial y} \ll \frac{B_0}{\rho_c}. \quad (2.29)$$

Из-за неоднородности магнитного поля вдоль оси y сила Лоренца не остается постоянной на траектории частицы. Среднее на траектории значение x -й компоненты силы Лоренца равно нулю: $\langle F_{Lx} \rangle = 0$. Проекция силы Лоренца на ось y :

$$F_{Ly} = -qV_x B = \mp qV_{\perp} \sin(\mp \omega_c t) \left[B_0 + \rho_c \sin(\mp \omega_c t) \frac{\partial B}{\partial y} \right], \quad (2.30)$$

где знак минус перед ω_c соответствует ионам, знак плюс – электронам. Усреднение по траектории дает

$$\langle F_{Ly} \rangle = \mp \frac{1}{2} qV_{\perp} \rho_c \frac{\partial B}{\partial y} = -\frac{mV_{\perp}^2}{2B} \frac{\partial B}{\partial y}, \quad (2.31)$$

$$\langle \mathbf{F}_L \rangle = -\frac{mV_{\perp}^2}{2B} \nabla B. \quad (2.32)$$

Используя формулы (2.20) и (2.32), получаем скорость градиентного дрейфа

$$\mathbf{V}_{\nabla B} = \frac{\langle \mathbf{F}_L \rangle \times \mathbf{B}}{qB^2} = \mp \frac{mV_{\perp}^2}{2|q|} \frac{\nabla B \times \mathbf{B}}{B^3} = \frac{mV_{\perp}^2}{2} \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{qB^3}. \quad (2.33)$$

Рассмотрим неоднородность магнитного поля, связанную с кривизной силовых линий. На частицы, двигающиеся вдоль магнитных линий, действует центробежная сила, вызывающая центробежный дрейф. Сначала предположим, что индукция магнитного поля, силовые линии которого искривлены, постоянна, т. е. линии расположены с постоянной частотой в пространстве (рис. 2.4). В действительности такое поле не может быть реализовано (это будет показано ниже), но мы будем рассматривать такую конфигурацию, чтобы отдельно выделить эффект, связанный с центробежной силой. Центробежная сила

$$\mathbf{F}_c = \frac{mV_{\parallel}^2}{R_c} \frac{\mathbf{R}_c}{R_c}, \quad (2.34)$$

где \mathbf{R}_c – радиус кривизны линий магнитного поля.

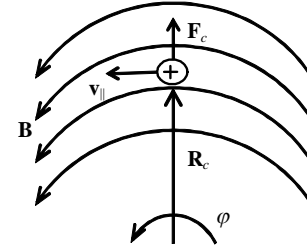


Рис. 2.4. К выводу центробежного дрейфа

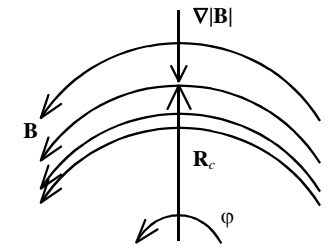


Рис. 2.5. Конфигурация магнитного поля бесконечного нитевидного тока

Используя формулы (2.20) и (2.34), получаем скорость центробежного дрейфа

$$\mathbf{V}_R = \frac{\mathbf{F}_c \times \mathbf{B}}{qB^2} = \frac{mV_{\parallel}^2}{qB^2} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2}. \quad (2.35)$$

В действительности модуль магнитного поля с искривленными линиями в вакууме (рис. 2.5) изменяется по закону

$$B = B_{\varphi}(R) = \frac{B_0 R_0}{R}. \quad (2.36)$$

Это соотношение следует из уравнения Максвелла для случая бесконечного нитевидного тока. Рассматриваемое поле может создаваться, например, бесконечным прямолинейным нитевидным током или тороидальными обмотками. Градиент равен

$$\nabla|B| = -\frac{B\mathbf{R}_c}{R_c^2}. \quad (2.37)$$

Используя формулу (2.33), находим

$$\mathbf{V}_{\nabla B} = \frac{mV_{\perp}^2}{2qB^2} \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{R_c^2}. \quad (2.38)$$

Скорость суммарного дрейфа в магнитном поле с искривленными силовыми линиями

$$\mathbf{V}_{dr} = \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_{\nabla B} = \left(mV_{\parallel}^2 + \frac{mV_{\perp}^2}{2} \right) \frac{\mathbf{R}_c \times \mathbf{B}}{qB^2 R_c^2}. \quad (2.39)$$

Формула (2.39) не является универсальной. Она применима только для магнитного поля, создаваемого в вакууме бесконечным нитевидным током или тороидальными обмотками.

2.6. Инерционный дрейф

Скорости дрейфа, полученные в разд. 2.3 и 2.5, которые здесь обозначим $\mathbf{V}^{(0)}$, могут зависеть от времени и пространственных координат. Непостоянство $\mathbf{V}^{(0)}$ приводит к возникновению силы инерции $\mathbf{F}_{in} = -m \frac{d\mathbf{V}^{(0)}}{dt}$ и дополнительному дрейфу, скорость которого по формуле (2.20) равна

$$\mathbf{V}^{(1)} = -\frac{m}{qB^2} \frac{d\mathbf{V}^{(0)}}{dt} \times \mathbf{B}. \quad (2.40)$$

Скорость инерциального дрейфа $\mathbf{V}^{(1)}$ в дрейфовой теории представляет собой поправку первого порядка малости к скорости $\mathbf{V}^{(0)}$, являющейся фактически начальным (нулевым) приближением. Аналогичным образом при необходимости могут быть найдены поправки более высоких порядков.

Следует обратить внимание, что в формулу (2.40) входит полная производная $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}^{(0)} \cdot \nabla$.

Один из параметров проявления инерциального дрейфа – так называемый поляризационный дрейф, возникающий под действием переменного электрического поля. Частицы дрейфуют вдоль линий электрического поля со скоростью

$$\mathbf{V}_p = \pm \frac{1}{\omega_c |B|} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (2.41)$$

где знак плюс – для ионов, минус – для электронов.

2.7. Адиабатический инвариант μ – магнитный момент

При движении в неподвижном магнитном поле на частицу действует сила (см. формулу (3.32))

$$F = -\mu \nabla B, \quad (2.42)$$

где

$$\mu = \frac{mV_{\perp}^2}{2B} \quad (2.43)$$

– магнитный момент частицы.

Покажем, что в стационарном магнитном поле на траектории частицы $\mu = const$, т.е. момент μ является инвариантом. Как и ранее, предполагаем, что магнитное поле стационарно, а в пространстве изменяется слабо, т.е. выполняется условие адиабатичности

$$\left| \frac{\nabla B}{B} \right| \ll \frac{1}{\rho_c}. \quad (2.44)$$

Пусть частица движется в магнитном поле, напряженность которого изменяется вдоль направления вектора \mathbf{B} , как, например, в магнитной пробке (рис. 2.6). Тогда в направлении магнитного поля на частицу действует сила

$$F_{\parallel} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s}, \quad (2.45)$$

где s – координата, отсчитываемая вдоль силовой линии магнитного поля.

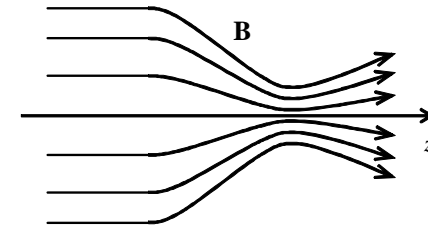


Рис. 2.6. Магнитная пробка

Уравнение продольного движения частицы:

$$m \frac{\partial v_{\parallel}}{\partial t} = F_{\parallel} = -\mu \frac{\partial B}{\partial s}. \quad (2.46)$$

Умножив уравнение (2.46) на $v_{\parallel} = \frac{ds}{dt}$, получим

$$m v_{\parallel} \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{ds}{dt} \frac{\partial B}{\partial s}. \quad (2.74)$$

Заметим, что на траектории частицы выполняется соотношение $\frac{ds}{dt} \frac{\partial B}{\partial s} = \frac{dB}{dt}$, так как магнитное поле стационарно, и полная производная включает только конвективную составляющую. После преобразования выражения (2.47) получаем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m v_{\parallel}^2}{2} \right) + \mu \frac{dB}{dt} = 0. \quad (2.48)$$

С другой стороны, магнитное поле не изменяет полной энергии частицы. Из закона сохранения энергии с учетом того, что $\frac{m v_{\perp}^2}{2} = \mu B$,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m v_{\parallel}^2}{2} \right) + \frac{d}{dt} (\mu B) = 0. \quad (2.49)$$

Выражения (2.48) и (2.49) должны совпадать, из чего следует выводы, что $\mu = const$.

Задачи

2.1. Покажите, что магнитное поле не изменяет энергию заряженной частицы.

Решение. Умножим первое из уравнений (2.4) – (2.6) на v_x , второе – на v_y , а третье – на v_z . После сложения уравнений получим, что

$$m \left(v_x \frac{dv_x}{dt} + v_y \frac{dv_y}{dt} + v_z \frac{dv_z}{dt} \right) = 0,$$

откуда

$$\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2} = const.$$

2.2. Вычислите циклотронные частоты протонов и электронов в магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл, а также тепловые скорости и ларморовские радиусы, если температуры $T_e = T_i = 100$ эВ.

2.3. Получите выражение (2.36) для магнитного поля бесконечного нитевидного тока.

Решение. Согласно уравнению Максвелла, $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$. В вакууме (за пределами проводника) $\nabla \times \mathbf{B} = 0$. В цилиндрических координатах

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R B_{\phi}) = 0,$$

откуда $R B_{\phi} = const$. Используя условие $B_{\phi} = B_0$ при $R = R_0$, получим (см. (2.36)):

$$B_{\phi}(R) = \frac{B_0 R_0}{R}.$$

Этот результат также справедлив, если ток пропущен по проводнику, намотанному на поверхность тора. В этом случае формула (2.36) определяет индукцию внутри тора. Снаружи тора индукция $B = 0$.

2.4. В открытой магнитной ловушке плазма удерживается между двумя магнитными пробками. Каким должно быть отношение продольной и поперечной скоростей $v_{\parallel} / v_{\perp}$ заряженной частицы, находящейся в середине ловушки между пробками, чтобы частица отражалась от пробок и удерживалась в ловушке? Какая сила изменяет скорость v_{\parallel} частицы вдоль магнитных силовых линий?

3. МАГНТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПЛАЗМЫ

3.1. Уравнения магнитной гидродинамики

Рассмотрим полностью ионизированную плазму, состоящую из двух компонентов, – ионов и электронов. Уравнение движения для компонента α ($\alpha = i, e$) без учета вязких напряжений имеет вид

$$m_\alpha n_\alpha \left[\frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla) \mathbf{v}_\alpha \right] = -\nabla p_\alpha + q_\alpha n_\alpha \mathbf{E} + \mathbf{j}_\alpha \times \mathbf{B} + \mathbf{R}_\alpha + \mathbf{f}_\alpha, \quad (3.1)$$

где ∇p_α – градиент давления; $q_\alpha n_\alpha \mathbf{E}$ – электростатическая сила; $\mathbf{j}_\alpha \times \mathbf{B}$ – сила Ампера; \mathbf{j}_α – плотность тока частиц сорта α ; \mathbf{R}_α – сила трения, учитывающая обмен импульсом между компонентами; \mathbf{f}_α – внешняя сила, действующая на единицу объема (например, сила тяжести $m_\alpha n_\alpha \mathbf{g}$).

Величины \mathbf{E} и \mathbf{B} , входящие в (3.1), соответствуют как полям, приложенным к плазме извне, так и полям, создаваемым частицами плазмы.

Уравнения неразрывности и энергии в общем виде для компонента α записываются следующим образом:

$$\frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{\Gamma}_\alpha = S_\alpha, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial w_\alpha}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}_\alpha = W_\alpha, \quad (3.3)$$

где w_α – объемная плотность энергии, $\mathbf{\Gamma}_\alpha$ и \mathbf{J}_α – потоки частиц и тепла, S_α и W_α – объемные плотности источников (и истоков) частиц и энергии. Источники и стоки частиц могут быть связаны с возникновением и гибелью зарядов. Обмен энергией между компонентами плазмы, излучение и джоулево тепловыделение соответствующим образом учитываются источниками и стоками энергии W_α .

Система уравнений магнитной гидродинамики (МГД) включает уравнения (3.1) – (3.3), а также уравнения Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (3.4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3.5)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sum q_i n_i - e n_e}{\varepsilon_0}, \quad (3.7)$$

где μ_0 – магнитная постоянная.

Отметим, что вместо уравнения (3.7) часто используется условие квазинейтральности

$$\sum_{\alpha=i,e} q_\alpha n_\alpha = 0 \quad (3.8)$$

(или $n_i = n_e$ в плазме с однозарядными ионами). Кроме того, в систему уравнений МГД включается обобщенный закон Ома

$$\mathbf{j}_\alpha = \sigma_\alpha (\mathbf{E} + \mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}), \quad (3.9)$$

где коэффициент электропроводности σ_α в общем случае является тензорной величиной, так как в магнитном поле плазма по-разному проводит электрический ток вдоль и поперек магнитного поля (см. разд. 2.4).

Если плазма состоит из многих компонентов, для каждого из которых рассматривается набор МГД-уравнений, то говорят о многожидкостном подходе. Если рассматриваются два компонента, – ионы и электроны, то говорят об двухжидкостной МГД.

В ряде задач можно ограничиться одножидкостной МГД. Складывая уравнения для ионов и электронов, с учетом условия квазинейтральности (3.8) получаем одножидкостное уравнение движения

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} \right] = -\nabla p + \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (3.10)$$

где ρ – плотность плазмы; $\mathbf{j} = \mathbf{j}_i + \mathbf{j}_e$. Внешними силами обычно можно пренебречь. Так как $m_i \gg m_e$, то $\rho \approx \rho_i$, а скорость плазмы, входящая в (3.10), практически равна скорости ионов.

3.2. Равновесие плазмы в магнитном поле. Параметр бета

Задача о равновесии плазмы в магнитном поле может быть решена в рамках одножидкостной МГД. Пусть имеется стационарное магнитное по-

ле, вектор которого \mathbf{V} параллелен оси z , а градиент давления параллелен оси x (рис. 3.1).

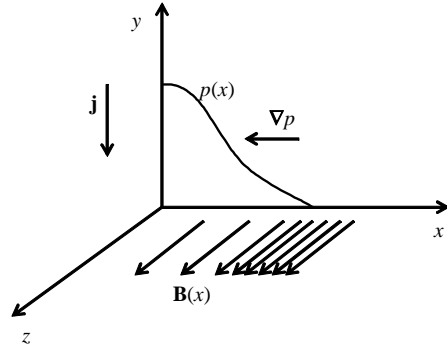


Рис. 3.1. К пояснению равновесия слоя плазмы в магнитном поле

Из уравнения движения (3.10) и уравнения Максвелла (3.4) следует, что $\nabla p = \mathbf{j} \times \mathbf{V}$ и $\mathbf{j} = \mu_0^{-1} \nabla \times \mathbf{V}$. Применительно к геометрии рассматриваемой задачи

$$\frac{\partial p}{\partial x} = j_y B_z = -\frac{B}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x}, \quad (3.11)$$

откуда

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial B^2}{2\mu_0} \right) = 0 \quad (3.12)$$

и, следовательно,

$$p + \frac{B^2}{2\mu_0} = \text{const} = \frac{B_0^2}{2\mu_0}, \quad (3.13)$$

где B_0 – индукция внешнего магнитного поля на границе плазмы, B – магнитная индукция в плазме.

Величина

$$p_M = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (3.14)$$

представляет собой магнитное давление.

Из (3.13) следует, что максимально возможное давление плазмы, удерживаемой внешним магнитным полем B_0 , составляет $p_{\text{max}} = B_0^2 / (2\mu_0)$.

В системах магнитного удержания важную роль играет параметр

$$\beta = \frac{\text{давление плазмы}}{\text{магнитное давление}} = \frac{2\mu_0 p}{B_0^2} \leq 1. \quad (3.15)$$

Согласно уравнению (3.13), плазма ослабляет внешнее поле B_0 . Диамагнитная проницаемость плазмы (по отношению к внешнему полю) равна

$$\mu_* = \frac{B}{B_0} = \sqrt{1 - \beta}. \quad (3.16)$$

Диамагнитное ослабление связано с тем, что в плазме конечного давления возникают диамагнитные токи, которые создают магнитное поле, направленное противоположно внешнему полю.

3.3. Диамагнитный дрейф плазмы

Рассмотрим равновесие компонента α . Для этого в уравнении (3.1) учтем только градиент давления, электростатическую силу и силу Ампера, в которую подставим ток $\mathbf{j}_\alpha = q_\alpha n_\alpha \mathbf{V}_\alpha$ (\mathbf{V}_α – скорость дрейфа компонента α):

$$q_\alpha n_\alpha \mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{V} = \nabla p_\alpha - q_\alpha n_\alpha \mathbf{E}. \quad (3.17)$$

Умножим векторно левую и правую части (3.17) на \mathbf{V} справа:

$$q_\alpha n_\alpha \mathbf{V}_\alpha \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} = \nabla p_\alpha \times \mathbf{V} - q_\alpha n_\alpha \mathbf{E} \times \mathbf{V} \quad (3.18)$$

По правилу вычисления двойного векторного произведения

$$\mathbf{V} \times \mathbf{V} \times \mathbf{V} = (\mathbf{V} \cdot \mathbf{V})\mathbf{V} - \mathbf{V}B^2 = -\mathbf{V}B^2. \quad (3.19)$$

Подставляя соотношение (3.19) в (3.17), получаем скорость дрейфа

$$\mathbf{V}_\alpha = -\frac{\nabla p_\alpha \times \mathbf{B}}{q_\alpha n_\alpha B^2} + \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2}. \quad (3.20)$$

Первое слагаемое в (3.20) представляет собой скорость диамагнитного дрейфа

$$\mathbf{V}_{*\alpha} = -\frac{\nabla p_\alpha \times \mathbf{B}}{q_\alpha n_\alpha B^2}, \quad (3.21)$$

а второе – скорость дрейфа под действием электрического поля (см. (2.19)).

Диамагнитный дрейф приводит к возникновению диамагнитного тока

$$\mathbf{j}^* = q_i n_i \mathbf{V}_{*i} - e n_e \mathbf{V}_{*e} = -\frac{\nabla p \times \mathbf{B}}{B^2}, \quad (3.22)$$

где $p = p_i + p_e$ – давление плазмы.

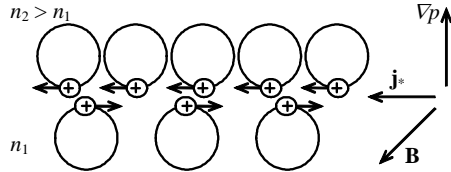


Рис. 3.2. К пояснению возникновения диамагнитного тока

Диамагнитный ток связан не с перемещением ведущих центров (ведущие центры в данном случае не двигаются), а с различием концентрации частиц по разные стороны от выделенной поверхности (рис. 3.2). При этом в противоположных направлениях поверхность пересекает различное число частиц. Данное рассуждение относится к случаю неоднородной концентрации и однородной температуры. Диамагнитный ток возникает также в случае однородной концентрации, но неоднородной температуры, так как частицы в области с большей температурой имеют большую скорость.

3.4 Амбиполярная диффузия

Рассмотрим плазму с неоднородным распределением концентрации. Наличие градиента концентрации вызывает диффузию. Для сохранения квазинейтральности плазмы необходимо, чтобы потоки положительных и

отрицательных зарядов были равны. Поскольку коэффициенты переноса для ионов и электронов могут существенно различаться по величине, в плазме возникает так называемое амбиполярное электрическое поле, обеспечивающее равенство потоков. Направление вектора напряженности амбиполярного поля \mathbf{E} параллельно градиенту концентрации и потокам частиц. Потоки частиц (ионов и электронов) определяются выражениями

$$\Gamma_i = \mu_i n_i \mathbf{E} - D_i \nabla n_i, \quad (3.23)$$

$$\Gamma_e = -\mu_e n_e \mathbf{E} - D_e \nabla n_e, \quad (3.24)$$

где $\mu_i = \sigma_i / (Z_i e n_i)$ и $\mu_e = \sigma_e / (e n_e)$ – коэффициенты подвижности ионов и электронов, σ_i и σ_e – коэффициенты электропроводности, D_i и D_e – коэффициенты диффузии.

Коэффициенты подвижности и диффузии связаны соотношением Эйнштейна

$$\mu_{i,e} = D_{i,e} \frac{|q_{i,e}|}{k_B T_{i,e}}. \quad (3.25)$$

Квазинейтральность ($n_e = Z_i n_i$) сохраняется при выполнении соотношения $\Gamma_e = Z_i \Gamma_i$. Тогда, исключая электрическое поле из уравнений (3.23) и (3.24), находим

$$\Gamma_i = -D_a \nabla n_i, \quad (3.26)$$

$$\Gamma_e = -D_a \nabla n_e, \quad (3.27)$$

где

$$D_a = \frac{D_i \mu_i^{-1} + D_e \mu_e^{-1}}{\mu_i^{-1} + \mu_e^{-1}} \quad (3.28)$$

– коэффициент амбиполярной диффузии (одинаковый для ионов и электронов). С учетом соотношения Эйнштейна (3.25), а также принимая во внимание, что $\mu_e \gg \mu_i$, при $T_e \approx T_i$ получаем $D_a \approx 2D_i$.

3.5. Взаимная диффузия магнитного поля и плазмы

Рассмотрим систему, состоящую из уравнений Максвелла (3.4) – (3.6) и обобщенного закона Ома в одножидкостном приближении:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \quad (3.29)$$

Подставим закон Ома в (3.4), исключим из системы (3.4) – (3.6) электрическое поле и получим

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.30)$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (3.31)$$

$$-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.32)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = -\nabla^2 \mathbf{B}. \quad (3.33)$$

В (3.33) учтено, что $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Подставляя (3.33) в (3.32), получаем уравнение переноса магнитного поля в плазме

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \sigma} \nabla^2 \mathbf{B} + \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (3.34)$$

где в правой части первое слагаемое определяет диффузионный механизм, а второе – конвективный. Коэффициент диффузии магнитного поля

$$D_M = \frac{1}{\mu_0 \sigma}. \quad (3.35)$$

В случае низкой проводимости диффузионный механизм доминирует над конвективным. Оценить время проникновения магнитного поля в плазму конечной проводимости можно так:

$$\tau = \frac{L^2}{D_M} = L^2 \mu_0 \sigma. \quad (3.36)$$

В случае конечной проводимости высокочастотное поле может проникнуть в плазму только на глубину так называемого скин-слоя:

$$\delta = \sqrt{\frac{D_M}{\omega}} = \sqrt{\frac{1}{\omega \mu_0 \sigma}}, \quad (3.37)$$

где ω – частота изменения поля.

В идеально проводящей плазме ($\sigma \rightarrow \infty$) диффузионным слагаемым можно пренебречь. В этом случае говорят, что линии магнитного поля «вморожены» в плазму, т.е. движутся вместе с плазмой.

Задачи

3.1. Определите максимальную концентрацию плазмы с $T_i = T_e = 10$ кэВ, удерживаемой магнитным полем $B = 5$ Тл, если $\beta = 0,1$. Вычислите магнитное давление.

3.2. В симметричном цилиндрическом столбе плазмы, помещенном во внешнее магнитное поле \mathbf{B} , концентрация зависит от радиуса:

$$n_i = n_e = n_0 \exp(-r^2 / r_0^2).$$

С другой стороны, по формуле Больцмана

$$n_i = n_e = n_0 \exp(e\Phi / k_B T_e).$$

Запишите выражения для скоростей электрического дрейфа и диамагнитного дрейфа и покажите, что в этом случае плазма вращается как твердое тело.

3.3. Для задачи 3.2 найдите выражение для плотности диамагнитного тока. Вычислите плотность диамагнитного тока для $B = 5$ Тл, $n_0 = 10^{19} \text{ м}^{-3}$, $T_i = T_e = 100$ эВ, $r = r_0 = 10$ см.

3.4. Получите соотношение Эйнштейна (3.25) с учетом того, что коэффициенты подвижности и диффузии имеют такие же значения, как при термодинамическом равновесии. В состоянии термодинамического равновесия поток частиц равен нулю ($\Gamma = 0$), $n = n_0 \exp\left(-\frac{q\Phi}{k_B T}\right)$. Электрическое поле $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$.

4. КИНЕТИКА ПЛАЗМЫ

4.1. Кинетическое уравнение. Интеграл столкновений Больцмана. Функция распределения Максвелла–Больцмана

Функция распределения частиц по скоростям $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ представляет собой плотность частиц в фазовом пространстве. Статистический смысл функции распределения – вероятность пребывания частицы в данной точке фазового пространства. Вычисляя моменты от функции распределения, можно получить концентрацию частиц, поток частиц, плотность энергии и тепловой поток:

$$n = \int f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{v}; \quad (4.1)$$

$$\Gamma = n \langle \mathbf{v} \rangle = \int \mathbf{v} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{v}; \quad (4.2)$$

$$n \langle \varepsilon \rangle = \int \frac{m \mathbf{v}^2}{2} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{v}; \quad (4.3)$$

$$\mathbf{Q} = \langle n \mathbf{v} \varepsilon \rangle = \int \frac{m \mathbf{v}^2}{2} \mathbf{v} f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) d^3 \mathbf{v}. \quad (4.4)$$

Здесь в угловых скобках записаны средние (усредненные по функции распределения) значения.

Переходы из одной точки фазового пространства в другую частицы совершают благодаря столкновениям, имеющим величину и направление вектора скорости. Следовательно, кинетическое уравнение представляется как равенство полной производной от функции распределения так называемому интегралу (оператору) столкновений

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{1}{m} \mathbf{F} \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = St(f), \quad (4.5)$$

где m – масса частицы рассматриваемого сорта; $\nabla_{\mathbf{v}}$ – оператор производной в пространстве скоростей.

Физический смысл оператора столкновений $St(f)$ – сумма источников и стоков частиц, связанных с изменением положения частиц в фазовом пространстве при столкновениях.

Интеграл столкновений в форме Больцмана описывает упругие парные столкновения

$$St_B(f) = \iint (f' f^{*'} - f f^{*'}) \sigma(u) |u| d^3 \mathbf{v}^* d^3 \mathbf{v}'^*, \quad (4.6)$$

где $f = f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$, $f' = f(\mathbf{v}', \mathbf{r}, t)$, $f^* = f(\mathbf{v}^*, \mathbf{r}, t)$, $f^{*'} = f(\mathbf{v}'^*, \mathbf{r}, t)$; $\sigma(u)$ – сечение столкновения; $u = \mathbf{v} - \mathbf{v}^*$ – относительная скорость сталкивающихся частиц. Здесь и далее символом * обозначены фоновые частицы, т.е. частицы, с которыми взаимодействует рассматриваемая пробная частица, а штрих соответствует состоянию после взаимодействия. Интегрирование в (4.6) ведется по всем значениям (от $-\infty$ до $+\infty$) скоростей фоновых частиц до и после рассеяния. Важно отметить, что больцмановский интеграл столкновений учитывает рассеяние на все углы от $\theta = 0$ до $\theta = \pi$.

При решении кинетического уравнения с интегралом столкновения (4.6) необходимо использовать законы сохранения импульса и энергии:

$$\mathbf{p} + \mathbf{p}^* = \mathbf{p}' + \mathbf{p}'^*, \quad (4.7)$$

$$\varepsilon + \varepsilon^* = \varepsilon' + \varepsilon'^*. \quad (4.8)$$

Сток частиц пропорционален вероятности того, что пробная и фоновая частицы находятся в рассматриваемой точке фазового пространства (прямые столкновения). Это отражено в (4.6) произведением $f f^*$. Частицы появляются в данной точке благодаря обратным столкновениям, следовательно, источник частиц пропорционален $f' f'^*$. Вероятности, а значит, и сечения прямого и обратного столкновений равны.

В состоянии термодинамического равновесия, несмотря на столкновения, функция распределения неизменна, следовательно, $St(f) = 0$. Тогда из равенства нулю больцмановского интеграла (4.6) получаем, что

$$\ln(f^*) + \ln(f^{*'}) = \ln(f) + \ln(f'^*), \quad (4.9)$$

Выражение (4.9) аналогично законам сохранения (4.7), (4.8), следовательно,

$$\ln(f) + \mathbf{b}_1 \cdot \mathbf{p} + b_2 \frac{m \mathbf{v}^2}{2} = const, \quad (4.10)$$

где \mathbf{b}_1 и b_2 – некоторые постоянные. Вводя новые постоянные, скаляр C и вектор \mathbf{u} , получаем из (4.10) максвелловскую функцию

$$f(\mathbf{v}) = C \exp \left[-b_2 \frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2} \right]. \quad (4.11)$$

Используя моменты (4.1) – (4.3), а также соотношение

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{3}{2} k_B T \quad (4.12)$$

нетрудно определить постоянные C , \mathbf{u} и b_2 . Так, $\mathbf{u} = \langle \mathbf{v} \rangle$ – гидродинамическая скорость. Окончательно максвелловская функция имеет вид

$$f(\mathbf{v}) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2k_B T} \right]. \quad (4.13)$$

Еще раз подчеркнем, что больцмановский оператор столкновений описывает парные столкновения, в то время как в плазме каждая частица непрерывно взаимодействует со многими соседними частицами.

В ряде задач можно принимать $St(f) = 0$, т.е. вообще пренебрегать столкновительными эффектами. Это допустимо в случае, если временной масштаб задачи значительно меньше, чем время между столкновениями. Как мы показали выше, другой случай, соответствующий $St(f) = 0$, – это термодинамически равновесная система с максвелловским распределением частиц по скоростям.

4.2. Формула Больцмана

Рассмотрим термодинамически равновесную систему частиц во внешнем потенциальном поле. Для простоты полагаем, что потенциальная сила направлена вдоль оси x . Кинетическое уравнение в данном случае выглядит так:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla f - \frac{1}{m} \nabla \varepsilon_p \nabla_{\mathbf{v}} f = 0, \quad (4.14)$$

где $\varepsilon_p = \varepsilon_p(x)$ – потенциальная энергия.

Решение будем искать в виде

$$f = X(x) \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right). \quad (4.15)$$

Тогда, считая температуру постоянной, из (4.14) получаем

$$\mathbf{v} \cdot \nabla X + X \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{\varepsilon_p}{k_B T} \right) = 0, \quad (4.16)$$

откуда находим функцию X . Окончательно запишем

$$f(x, \mathbf{v}) = \text{const} \cdot \exp \left(-\frac{mv^2/2 + \varepsilon_p}{k_B T} \right). \quad (4.17)$$

После интегрирования по скорости в соответствии с (4.1) получаем формулу Больцмана

$$n(x) = n_0 \exp \left(-\frac{\varepsilon_p}{k_B T} \right), \quad (4.18)$$

где n_0 – концентрация в точке, где $\varepsilon_p = 0$.

Для электронов $\varepsilon_p = -e\Phi(x)$, следовательно,

$$n(x) = n_0 \exp \left[\frac{e\Phi(x)}{k_B T} \right]. \quad (4.19)$$

С помощью этой формулы, например, может быть найдена связь концентрации электронов и амбиполярного электрического поля, рассмотренного в разд. 3.4.

4.3. Кулоновские столкновения в полностью ионизированной плазме. Кулоновский логарифм. Уравнение Фоккера–Планка

Кулоновские столкновения рассматриваются при следующих приближениях (*Сивухин, 1964*). Во-первых, несмотря на то, что каждая частица плазмы постоянно взаимодействует с большим количеством частиц, взаимодействия рассматриваются как парные столкновения. Во-вторых, взаимодействие частиц, находящихся друг от друга на расстоянии, превышающем дебаевский радиус, не учитываются. И, наконец, столкновения считаются упругими, то есть выполняются законы сохранения импульса и энергии (4.7) и (4.8). Усредненные по углу скорости изменения импульса и энергии пробной (рассматриваемой) частицы при взаимодействии с фоновыми частицами равны соответственно

$$\left\langle \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right\rangle = n^* u \int_{\theta_{\min}}^{\pi} \delta\mathbf{p} \sigma(u, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (4.20)$$

$$\left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle = n^* u \int_{\theta_{\min}}^{\pi} \delta\varepsilon \sigma(u, \theta) 2\pi \sin \theta d\theta, \quad (4.21)$$

где n^* – концентрация фоновых частиц; u – модуль относительной скорости взаимодействующих частиц; $\delta\mathbf{p}$ и $\delta\varepsilon$ – изменения импульса и энергии при одном столкновении; $\sigma(u, \theta)$ – сечение рассеяния; θ – угол рассеяния. Траектория частицы при столкновении показана на рис. 4.1.

Дальними столкновениями, приводящими к рассеянию на малые углы ($\theta < \theta_{\min}$), пренебрегаем, поэтому при усреднении в (4.20) и (4.21) не следует включать столкновения с прицельным параметром b , большим, чем дебаевский радиус r_D . При $\theta_{\min} = 0$ интегралы (4.20) и (4.21) расходятся, а θ_{\min} соответствует максимальному прицельному параметру $b_{\max} = r_D$.

В системе центра масс сталкивающихся частиц изменения импульса и энергии (рис. 4.2):

$$\delta\mathbf{p} = M\delta\mathbf{u}, \quad (4.22)$$

$$\delta\varepsilon = M\mathbf{V} \cdot \delta\mathbf{u}, \quad (4.23)$$

где $M = \frac{mm^*}{m+m^*}$ – приведенная масса, $V = \frac{m\mathbf{v} + m^*\mathbf{v}^*}{m+m^*}$ – скорость центра масс, $\delta u_{\perp} = u' \sin \theta \approx u \sin \theta$, $\delta u_{\parallel} = u' \cos \theta - u \approx u(1 - \cos \theta)$.

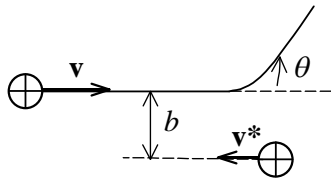


Рис. 4.1. Схема кулоновского столкновения для двух положительно заряженных частиц

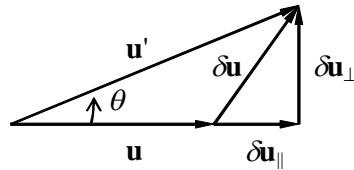


Рис. 4.2. Изменение скорости частицы при рассеянии

Сечение кулоновского рассеяния $\sigma(u, \theta)$ равно Резерфордскому сечению

$$\sigma_R = \frac{b_{\perp}^2}{4 \sin^4 \theta/2}, \quad (4.24)$$

где $b_{\perp} = \frac{ZZ^* e^2}{4\pi\epsilon_0 M u^2}$ – значение прицельного параметра, соответствующее рассеянию на угол $\pi/2$.

Вычислим интеграл (4.21):

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle &= n^* u \int_{\theta_{\min}}^{\pi} M V \delta u_{\parallel} \sigma_R 2\pi \sin \theta d\theta = \\ &= n^* u V M \int_{\theta_{\min}}^{\pi} (1 - \cos \theta) \frac{b_{\perp}^2}{4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} 2\pi \sin \theta d\theta = \\ &= 4\pi n^* u^2 V M b_{\perp}^2 \int_{\theta_{\min}}^{\pi} \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}} d\frac{\theta}{2} = \\ &= 4\pi n^* u^2 V M b_{\perp}^2 \ln \left[\left(\sin \frac{\theta_{\min}}{2} \right)^{-1} \right], \end{aligned} \quad (4.25)$$

где

$$\Lambda = \ln \left[\left(\sin \frac{\theta_{\min}}{2} \right)^{-1} \right] = \ln \left(\frac{b_{\max}}{b_{\perp}} \right) = \ln \left(\frac{r_D}{b_{\perp}} \right) \quad (4.26)$$

– кулоновский логарифм. Такой же логарифм получается в результате вычисления интеграла (4.20).

Для оценки усредненной по функции распределения величины b_{\perp} в (4.26) используются тепловые скорости частиц. Тогда кулоновский логарифм является слабо меняющейся функцией температуры и концентрации. Следует обратить внимание, что вычисленное значение кулоновского логарифма – классическое, так как мы использовали классическое Резерфордское сечение. Однако учет квантовых поправок несильно влияет на окончательный результат. Так, в плазме с $T_i \approx T_e$ от нескольких электрон-

вольт до сотен кэВ и $n \approx 10^{18} - 10^{21} \text{ м}^{-3}$ кулоновский логарифм порядка $\Lambda \approx 10 - 20$.

Характерные времена кулоновских столкновений вычисляются согласно соотношениям, определяющим потерю энергии и импульса:

$$\left\langle \left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle \right\rangle = \frac{\varepsilon}{\tau^\varepsilon}, \quad (4.27)$$

$$\left\langle \left\langle \frac{dp_{\parallel}}{dt} \right\rangle \right\rangle = \frac{p_{\parallel}}{\tau^{p_{\parallel}}}, \quad (4.28)$$

$$\left\langle \left\langle \frac{dp_{\perp}}{dt} \right\rangle \right\rangle = \frac{p_{\perp}}{\tau^{p_{\perp}}}, \quad (4.29)$$

где вторые угловые скобки означают усреднение по максвелловской функции распределения, а соответствующие времена релаксации $\tau^\varepsilon \approx \tau^{p_{\parallel}} \approx \tau^{p_{\perp}}$.

Время столкновений частиц сорта α с частицами сорта β :

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{3\pi\sqrt{2}\pi\varepsilon_0^2 m_\alpha m_\beta}{Z_\alpha^2 Z_\beta^2 e^4 n_\beta \Lambda_{\alpha\beta}} \left(\frac{k_B T_\alpha}{m_\alpha} + \frac{k_B T_\beta}{m_\beta} \right)^{3/2}, \quad (4.30)$$

причем для тождественных частиц ($\alpha = \beta$) формулу (4.30) необходимо разделить на $\sqrt{2}$. Так, время электрон-электронных столкновений

$$\tau_{ee} = \frac{6\pi\sqrt{2}\pi\varepsilon_0^2 \sqrt{m_e} (k_B T_e)^{3/2}}{n_e \Lambda_{ee} e^4}, \quad (4.31)$$

а соотношение между временами электрон-электронных, ион-ионных и электрон-ионных столкновений при $n_e = n_i$ и $\Lambda_{ee} \approx \Lambda_{ii} \approx \Lambda_{ei}$ следующее:

$$\tau_{ee} : \tau_{ii} : \tau_{ei} = 1 : \sqrt{\frac{m_i}{m_e} \left(\frac{T_i}{T_e} \right)^{3/2}} : \frac{1}{2} \frac{m_i}{m_e}.$$

Отметим, что $\tau_{ee} \ll \tau_{ii} \ll \tau_{ei}$. Это означает, что в плазме с термически равновесными ионами и электронами возможно существенное различие ионной и электронной температур ($T_i \neq T_e$).

Зная времена столкновений, можно представить столкновительный оператор в простой форме (τ -приближение)

$$St(f) = -\frac{f - f_0}{\tau}, \quad (4.32)$$

где f_0 – равновесная (например, максвелловская) функция распределения; τ – время релаксации, практически равное времени столкновений. Это достаточно удобное приближение для рассмотрения систем, релаксирующих к известному распределению f_0 . Но следует помнить, что столкновительный оператор (4.32) не сохраняет число частиц в единице фазового объема.

Непрерывное кулоновское взаимодействие приводит к тому, что изменение положения частицы в фазовом пространстве скоростей выглядит как диффузионный процесс. Поэтому можно ввести коэффициенты диффузии по скорости (по модулю скорости v) и по углу θ (по направлению скорости):

$$D_{vv} = \frac{\langle \delta v^2 \rangle}{\tau^{\parallel}}, \quad (4.33)$$

$$D_{\theta\theta} = \frac{\langle \delta \theta^2 \rangle}{\tau^{\perp}}, \quad (4.34)$$

и коэффициент динамического трения

$$A_v = \frac{\langle \delta v \rangle}{\tau^{\parallel}}. \quad (4.35)$$

Здесь символы \perp и \parallel означают изменение скорости по направлению и модулю соответственно, а времена кулоновских столкновений τ^{\parallel} и τ^{\perp} учитывают взаимодействие рассматриваемой (пробной) частицы с фоновыми частицами всех сортов (включая частицы данного сорта). Угловые скобки означают усреднение по функциям распределения фоновых частиц.

Столкновительный оператор Фоккера–Планка представляет собой дивергенцию потока частиц в фазовом пространстве скоростей. В сферических координатах v и θ записывается следующим образом:

$$St_{FP}(f) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^2 \left[D_{vv} \frac{\partial f}{\partial v} - A_v f \right] + \frac{1}{v^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta D_{\theta\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}. \quad (4.36)$$

Кинетическое уравнение со столкновительным оператором вида (4.36) называется уравнением Фоккера–Планка. Следует помнить, что для вычисления коэффициентов диффузии и трения, входящих в (4.36), нужно знать функции распределения всех частиц, а, следовательно, и саму искомую функцию f . Таким образом, оператор Фоккера–Планка на самом деле является интегро-дифференциальным.

В случае, когда функция распределения близка к равновесной, можно воспользоваться коэффициентами, вычисленными с использованием максвелловского распределения. Другой случай, когда оператор Фоккера–Планка вычисляется достаточно просто, – задача о функции распределения малочисленной популяции частиц. Тогда взаимодействиями частиц внутри популяции можно пренебречь и вычислить коэффициенты Фоккера–Планка по известным функциям распределения частиц других популяций.

4.4. Кинетическое уравнение Власова

Уравнение Власова (*Власов, 1938*) используется для описания бесстолкновительной кинетики процессов в плазме, протекающих за короткие времена по сравнению с характерными временами столкновений, определенными в предыдущем разделе. Уравнение Власова записывается следующим образом:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f = 0, \quad (4.37)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{B} – так называемые самосогласованные поля, включающие как поля внешних по отношению к плазме источников, так и поля, индуцируемые самими частицами плазмы.

Уравнение Власова в явном виде не включает столкновений, так как в правой части $St(f) = 0$. Однако кулоновское взаимодействие частиц учтено в самосогласованных полях.

Многие типы волн, распространяющихся в плазме, удовлетворяют бесстолкновительному приближению (частоты волн много больше частот столкновений). Поэтому уравнение Власова является основой кинетической теории волн и неустойчивостей в плазме. Одной из первых на основе уравнения Власова была решена задача о затухании ленгмюровских волн (*Ландау, 1946*). Найденный в результате решения бесстолкновительный механизм затухания, называется затуханием Ландау.

Задачи

4.1. Плазма находится в постоянном магнитном поле, определяемом вектором-потенциалом $\mathbf{A} = (0, A, 0)$, где A не зависит от y . Электрическое поле отсутствует. Покажите, что для каждого сорта частиц решение уравнения Больцмана записывается в виде

$$f \sim \exp\left(-\frac{W - up_y}{k_B T}\right),$$

где $W = mv^2/2$; $p_y = mv_y \pm eA$. Объясните смысл постоянной u . Покажите, что плазма всюду нейтральна при условии

$$\frac{u_i}{T_i} + \frac{u_e}{T_e} = 0.$$

Полагая $T_i = T_e = T$ и $u_i = -u_e = u$, покажите, что концентрация частиц каждого сорта

$$n(x, z) = n_0 \exp\left(\frac{euA}{k_B T}\right).$$

4.2. Вычислите времена столкновений (времена потери импульса и энергии) для дейтериевой плазмы с $T_i = T_e = 15$ кэВ, $n_i = n_e = 10^{20} \text{ м}^{-3}$.

4.3. Оцените время удержания плазмы, состоящей из равных количеств дейтерия и трития (и электронов), в открытой магнитной ловушке. Плазма в открытой ловушке удерживается между двумя пробками. Магнитное поле в центре ловушки $B_{\min} = 3$ Тл, в пробках – $B_{\max} = 9$ Тл. Температура плазмы $T = 15$ кэВ, $\beta = 0,4$. При каких значениях угла θ ионы не будут удерживаться в такой ловушке? Будет ли эффективным термоядерный реактор на основе открытой ловушки, если для самоподдерживающейся дейтерий-тритиевой реакции необходимо выполнение условия $n\tau > 5 \times 10^{20} \text{ м}^{-3}\text{с}$ ($n = n_i + n_e$ – концентрация; τ – время удержания частиц)?

5. ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

5.1. Методы анализа волн и неустойчивостей

Сегодня наиболее разработанной является линейная теория, основанная на методе малых возмущений. В рамках такого приближения возмущения всех величин (плотности, температуры, гидродинамических скоростей, электрического и магнитного полей, функции распределения частиц по скоростям и др.) представляются в виде гармонических волн малой амплитуды. Так, например, в декартовых координатах (в плоской геометрии) возмущение электростатического потенциала записывается в виде

$$\tilde{\varphi} = \varphi_1 \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = \varphi_1 \exp(-i\omega t + ik_x x + ik_y y + ik_z z), \quad (5.1.1)$$

где φ_1 – амплитуда; i – мнимая единица; ω – частота; \mathbf{k} – волновой вектор; $k_x, k_y,$ и k_z – компоненты волнового вектора; x, y и z – декартовы координаты; t – время.

Уравнение (5.1.1) задает плоскую гармоническую волну. Фазовая скорость такой волны равна $v_{ph} = \omega/k$, вектор фазовой скорости направлен вдоль \mathbf{k} . Для волнового пакета с заданной зависимостью $\omega(\mathbf{k})$ можно определить групповую скорость $v_g = \partial\omega/\partial k$. Для плазмы неограниченных размеров значения компонент волнового вектора могут быть любыми. Для плазмы конечных размеров допустимым значениям компонент волнового вектора соответствует дискретный набор чисел, определяемых граничными условиями.

Удобство представления возмущений в виде (5.1.1) заключается в том, что применение дифференциальных операторов к возмущениям в этом случае сводится к операции умножения. Нетрудно показать, что для гармонических возмущений вида (5.1.1) $\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial t} = -i\omega \tilde{\varphi}$, то есть оператор

производной по времени $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$. Также находят, что вычисление градиента скалярной величины сводится к умножению на $i\mathbf{k}$, вычисление дивергенции и ротора векторной величины – к скалярному и векторному умножению на $i\mathbf{k}$, соответственно. Таким образом, для возмущений $\nabla = i\mathbf{k}$. Например, для потенциала $\tilde{\varphi}$ и напряженности электрического поля $\tilde{\mathbf{E}}$ волны $\nabla \tilde{\varphi} = i\mathbf{k}\tilde{\varphi}$, $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{E}} = i\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{E}}$, $\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{E}}$.

Волновой вектор указывает направление распространения волны, а по величине он равен $k = 2\pi/\lambda$, где λ – длина волны. В рассматриваемых нами задачах компоненты волнового вектора считаются действительными величинами, а частота может иметь мнимую часть. Представим частоту в

виде $\omega = \omega_R + i\gamma$, где $\omega_R = \text{Re}(\omega)$ – действительная часть, $\gamma = \text{Im}(\omega)$ – мнимая часть. Используя (5.1.1) запишем возмущение

$$\tilde{\varphi} = \varphi_1 \exp(\gamma t) \exp(-i\omega_R t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}). \quad (5.1.2)$$

Если рассматривать φ_1 как начальную амплитуду, то выражение (5.1.2) описывает волну, амплитуда которой изменяется пропорционально $\exp(\gamma t)$. При $\gamma > 0$ амплитуда увеличивается (волна нарастает), при $\gamma < 0$ амплитуда уменьшается и имеет место затухание волны. В первом случае ($\gamma > 0$) говорят, что имеет место неустойчивость, то есть плазма неустойчива по отношению к рассматриваемым малым возмущениям. Величину γ в этом случае принято называть инкрементом неустойчивости. Зависимость, связывающую комплексную частоту ω с волновым вектором \mathbf{k} называют дисперсионным соотношением. Дисперсионное соотношение получают из линеаризованных уравнений, описывающих плазму и электромагнитное поле.

Если рассматриваются колебания, длины волн которых значительно больше дебаевского радиуса r_D (выполняется условие $kr_D \ll 1$), то разделением зарядов в волне можно пренебречь и считать такие колебания квазинейтральными. Это выражается равенством

$$n_e \tilde{=} = \sum Z_i n_i \tilde{=} , \quad (5.1.3)$$

$n_e \tilde{=}$ – возмущение концентрации электронов, $n_i \tilde{=}$ – возмущение концентрации ионов, Z_i – заряд ионов, суммирование ведется по всем сортам ионов.

В ряде случаев заряженные частицы (электроны или ионы), находящиеся в электрическом поле волны, успевают распределиться в пространстве в соответствии с формулой Больцмана, которая дает связь концентрации с электрическим потенциалом волны $n + n \tilde{=} = n \exp\left(-\frac{q\tilde{\varphi}}{k_B T}\right)$, где n, q и

T – невозмущенная концентрация, заряд и температура частиц рассматриваемого сорта, k_B – постоянная Больцмана. Так как рассматриваются малые колебания, то $|q\tilde{\varphi}| \ll k_B T$ и $\exp\left(-\frac{q\tilde{\varphi}}{k_B T}\right) \approx 1 - \frac{q\tilde{\varphi}}{k_B T}$. В этом случае формула

Больцмана дает соотношение

$$\frac{n \tilde{=}}{n} = -\frac{q\tilde{\varphi}}{k_B T}. \quad (5.1.4)$$

Выражение (5.1.4) соответствует приближению Больцмановских возмущений, которое в международной терминологии называют адиабатическим.³ Оно часто используется для электронов, в тех случаях, когда Больцмановское распределение электронов в электрическом поле волны устанавливается за время, значительно меньше периода колебаний.

Если фазовые скорости рассматриваемых волн малы, то волны можно рассматривать в электростатическом приближении, то есть учитывать только электрическую составляющую волны и не учитывать магнитную. Электростатическое приближение для плазмы во внешнем магнитном поле также применяют если $\beta \ll 1$, где β – отношение давления плазмы к магнитному давлению. Обычно при $\beta \ll 1$ вихревая составляющая электрического поля пренебрежимо мала по сравнению с потенциальной. В противном случае волны необходимо рассматривать как электромагнитные.

В реальных плазменных конфигурациях всегда есть градиенты параметров (температуры, плотности, давления), направленные, как правило, от центральных областей к периферии. При анализе волновых процессов чаще всего значения, как параметров плазмы, так и их градиентов считают постоянными и равными локальным значениям этих величин на некоторой поверхности, около которой рассматривают волны. Такой подход принято называть локальным. Существует также нелокальный подход, учитывающий изменение параметров плазмы при удалении от рассматриваемой поверхности. Он позволяет находить изменение формы волны в направлении градиентов. При нелокальном подходе задача о неустойчивости сводится к анализу волнового уравнения, что делает ее сложнее, чем при локальном подходе. Нелокальный подход позволяет получить форму волны в направлении градиентов. При этом в ряде случаев волна оказывается существенно ограниченной в указанном направлении.

Волны можно рассматривать в гидродинамическом приближении или использовать кинетическое описание. В ряде случаев гидродинамический подход не позволяет сделать вывод об устойчивости (например, дрейфовых волн в бесстолкновительной плазме).

5.2. Электронные плазменные волны. Затухание Ландау

Электронные плазменные (ленгмюровские) волны связаны с распространением колебаний плотности заряда. В связи с высокой частотой ионы

³ В этом случае речь не идет об адиабатическом процессе сжатия или расширения плазмы. Имеется в виду, что время установления равновесного Больцмановского распределения значительно меньше периода волны, что в термодинамике соответствует квазистатическому процессу (равновесному, без перехода части энергии в теплоту).

в данной задаче можно считать неподвижными, а их концентрацию постоянной величиной.

Будем рассматривать одномерный случай и использовать для электронов уравнение адиабаты $p \sim n^k$, где k – показатель адиабаты. В одномерном случае $k = 3$.

Уравнение движения электронной составляющей имеет вид

$$m_e n_e \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = e n_e \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{\partial p_e}{\partial x}, \quad (5.2.1)$$

где ϕ – электростатический потенциал волны.

Представим все величины в виде суммы невозмущенного значения и малого возмущения. Например, $n_e = n_{e0} + \tilde{n}_e$, где индексом “0” обозначены невозмущенные величины, а символом “~” – возмущения.

Учтем, что $v_0 = 0$, а также то, что $\frac{\partial p_e}{\partial x} = \kappa k_B T_e \frac{\partial n_e}{\partial x}$. Подставляя эти величины в (5.2.1) и пренебрегая малыми величинами второго порядка малости, получим линеаризованное уравнение движения

$$m_e n_{e0} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = e n_{e0} \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial x} - \kappa k_B T_e \frac{\partial \tilde{n}_e}{\partial x}. \quad (5.2.2)$$

Следуя методу малых возмущений в рамках линейной теории, все возмущения считаем пропорциональными $\exp[i(kx - \omega t)]$. Тогда в рассматриваемом случае переходим от дифференциальных операций к алгебраическим путем замены оператора $\frac{\partial}{\partial t}$ умножением на $-i\omega$, а $\frac{\partial}{\partial x}$ – умножением на ik . Алгебраический аналог уравнения (5.2.2)

$$-i\omega m_e n_{e0} \tilde{v} = i k e n_{e0} \tilde{\phi} - i k \kappa k_B T_e \tilde{n}_e. \quad (5.2.3)$$

Ленгмюровские колебания нельзя считать квазинейтральными, так как длины волн сравнимы с величиной Дебаевского радиуса, определяющего пространственный масштаб разделения зарядов в плазме. Считая ионы неподвижными, из уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \tilde{\phi}}{\partial x^2} = -\frac{e}{\epsilon_0} \tilde{n}_e \quad (5.2.4)$$

получаем

$$\varphi \sim -\frac{en_e \sim}{k^2 \varepsilon_0}. \quad (5.2.5)$$

Из линеаризованного уравнения неразрывности

$$\frac{\partial n_e \sim}{\partial t} + \frac{\partial (n_{e0} v \sim)}{\partial x} = 0 \quad (5.2.6)$$

получаем

$$v \sim = \frac{\omega n_e \sim}{kn_{e0}}. \quad (5.2.7)$$

Подставив (5.2.5) и (5.2.7) в (5.2.3), получим

$$-\frac{m_e \omega^2}{k} n_e \sim = -\frac{e^2 n_{e0}}{k \varepsilon_0} n_e \sim - \kappa k k_B T_e n_e \sim, \quad (5.2.8)$$

откуда следует дисперсионное уравнение для ленгмюровских волн

$$\omega^2 = \omega_p^2 + \kappa k^2 v_{Te}^2, \quad (5.2.9)$$

Отметим, что в рамках гидродинамического подхода в данном случае невозможно судить о том, будут ли ленгмюровские волны нарастать или затухать. Гидродинамика показывает принципиальную возможность распространения таких волн в плазме. Для анализа устойчивости ленгмюровских волн необходимо использовать кинетический подход.

При кинетическом анализе используются линеаризованные уравнения Власова и Пуассона

$$\frac{\partial f \sim}{\partial t} + v_x \frac{\partial f \sim}{\partial x} - \frac{eE \sim}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} = 0, \quad (5.2.10)$$

$$\frac{\partial E \sim}{\partial x} = -\frac{e}{\varepsilon_0} \int f \sim d^3 v, \quad (5.2.11)$$

где направление оси x совпадает с направлением распространения волны; f_0 – невозмущенная функция распределения (например, максвелловская); $f \sim$ – возмущенная часть функции распределения, для которой $\int f \sim d^3 v = n_e \sim$.

Используя метод малых возмущений, представим (5.2.10) в виде

$$-i(\omega - kv_x) f \sim = \frac{eE \sim}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_x}, \quad (5.2.12)$$

откуда получим выражение для возмущения функции распределения

$$f \sim = i \frac{eE \sim}{m_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \frac{1}{\omega - kv_x} \quad (5.2.13)$$

и подставим его в уравнение Пуассона:

$$kE \sim = -\frac{e^2 E \sim}{\varepsilon_0 m_e} \int \frac{1}{\omega - kv_x} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} dv_x dv_y dv_z. \quad (5.2.14)$$

Проинтегрировав (5.2.14) с максвелловской функцией f_0 получаем дисперсионное уравнение для ленгмюровских волн:

$$1 = \frac{\omega_p^2}{k^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{v_x - \omega/k} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} dv_x, \quad (5.2.15)$$

где нормированная на единицу одномерная максвелловская функция распределения равна

$$\hat{f}_0(v_x) = \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_x^2}{2k_B T} \right). \quad (5.2.16)$$

Подынтегральная функция в (5.2.15) имеет полюс $v_x = \omega/k$. Будем полагать что, $kv_{Te} \ll \omega$ ($v_{Te} = \sqrt{k_B T/m_e}$ – тепловая скорость электронов). Тогда вне ε -окрестности полюса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{v_x - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_x} dv_x = \frac{\hat{f}_0(v_x)}{v_x - \omega/k} \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}_0(v_x)}{(v_x - \omega/k)^2} dv_x =$$

$$= \frac{k^2}{\omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[1 + 2 \frac{kv_x}{\omega} + 3 \left(\frac{kv_x}{\omega} \right)^2 + \dots \right] \hat{f}_0(v_x) dv_x \approx \frac{k^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right). \quad (5.2.17)$$

Для вычисления интеграла в ε -окрестности необходимо область определения подынтегральной функции расширить на комплексную плоскость. Знаменатель представим в виде $v_x - \omega/k = \varepsilon \exp(i\varphi)$, где ε и φ – модуль и аргумент комплексного числа. При интегрировании по ε -окрестности полюс, согласно правилу Ландау, обходится по часовой стрелке. Полюс $v_x = \omega/k$ лежит на оси v_x , при обходе полюса аргумент φ изменяется на π . Интегрирование дает следующий результат:

$$\int_{\varepsilon} \frac{1}{v_x - \omega/k} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_x} dv_x = \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_x} \Big|_{v_x = \omega/k} \int_0^{\pi} i d\varphi = i\pi \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_x} \Big|_{v_x = \omega/k} \quad (5.2.18)$$

Окончательно дисперсионное уравнение можно записать в виде

$$1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 + 3 \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2} \right) + i\pi \frac{\omega_p^2}{k^2} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_x} \Big|_{v_x = \omega/k} \quad (5.2.19)$$

Представляя частоту $\omega = \omega_R + i\gamma$ и считая, что $\gamma \ll \omega_R$, из (5.2.19) найдем, что действительная часть частоты $\omega_R = \text{Re}(\omega) \approx \omega_p$, а мнимая часть

$$\gamma = \text{Im}(\omega) \approx \frac{\pi \omega_p^3}{2 k^2} \frac{\partial \hat{f}_0}{\partial v_x} \Big|_{v_x = \omega/k}. \quad (5.2.20)$$

Так как максвелловская функция \hat{f}_0 монотонно убывает, то $\gamma < 0$, что означает затухание ленгмюровских волн.

Рассмотренный кинетический механизм затухания ленгмюровских волн называют затуханием Ландау.

5.3. Звуковые волны в нейтральном газе и ионно-звуковые волны в плазме

Звуковые волны в нейтральном газе рассмотрим на основе уравнения движения (Эйлера) и уравнения неразрывности

$$\rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\nabla p = -\kappa \frac{p}{\rho} \nabla \rho, \quad (5.3.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial x} = 0, \quad (5.3.2)$$

где κ – показатель адиабаты газа.

Линеаризованные уравнения для возмущений имеют вид

$$-i\omega \rho_0 \tilde{v} = -i\kappa \frac{p_0}{\rho_0} \tilde{\rho}, \quad (5.3.3)$$

$$-i\omega \tilde{\rho} + i\kappa \rho_0 \tilde{v} = 0. \quad (5.3.4)$$

Из (5.3.3) и (5.3.4) получаем дисперсионное уравнение для звуковых волн в газе

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\kappa \frac{k_B T}{m}}, \quad (5.3.5)$$

где c_s – фазовая скорость звуковой волны, – скорость звука. Так как $\omega = c_s k$, то $\frac{\partial \omega}{\partial k} = c_s$, и c_s является также и групповой скоростью.

Отметим важную особенность звуковых волн, заключающуюся в том, что все моды, имеющие различную длину волны, распространяются с одной и той же фазовой скоростью. Эта особенность присуща также рассматриваемым ниже ионно-звуковым, альфвеновским и магнитозвуковым волнам.

Линеаризованное уравнение возмущенного движения ионов записывается следующим образом:

$$m_i n_i \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -en_i \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} - \frac{\partial p_i}{\partial x} = -en_i \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} - \kappa_i k_B T_i \frac{\partial n_i}{\partial x}, \quad (5.3.6)$$

где κ_i – показатель адиабаты ионов.

Из (5.3.6) получаем

$$-i\omega m_i n_0 \tilde{v} = -iken_0 \tilde{\varphi} - ik\kappa_i k_B T_i \tilde{n}_i, \quad (5.3.7)$$

где $n_0 = n_{e0} = n_{i0}$ (для простоты ионы считаются однозарядными).

После линеаризации уравнение неразрывности для ионов имеет вид

$$-i\omega \tilde{n}_i + ikn_0 \tilde{v} = 0. \quad (5.3.8)$$

Полагая $\tilde{n}_i = n_e$ (квазинейтральные колебания) и используя для электронов больцмановское приближение, запишем

$$\tilde{n}_i = \tilde{n}_e = n_0 \frac{e\tilde{\varphi}}{kT_e}. \quad (5.3.9)$$

Выразим через возмущенную концентрацию ионов скорость из (5.3.8), а потенциал – из (5.3.9), подставим в (5.3.7), откуда получим дисперсионное уравнение для ионно-звуковых волн

$$\omega^2 = k^2 \left(\frac{k_B T_e + \kappa_i k_B T_i}{m_i} \right). \quad (5.3.10)$$

Фазовая скорость ионно-звуковых волн

$$v_s = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{k_B T_e + \kappa_i k_B T_i}{m_i}}. \quad (5.3.11)$$

Как показывает кинетический анализ, в бесстолкновительной плазме амплитуды ионно-звуковых волн уменьшаются из-за затухания Ландау на ионах. Затухание ослабевает в неизотермической плазме с $T_e \gg T_i$. При рассмотрении ионно-звуковых волн колебания можно считать квазинейтральными, так как возмущения концентрации ионов почти полностью нейтрализуются подвижными электронами. Если бы электроны можно было считать неподвижными, то этому случаю соответствовали бы «ионные» ленгмюровские волны, которые в действительности не существуют.

В этом разделе мы рассматривали гидродинамические волны в плазме без магнитного поля. Отличие гидродинамического подхода в случае плазмы от случая обычной незаряженной жидкости заключалось только в

учете действия потенциального электрического поля волны. Еще раз обратим внимание, что при анализе ленгмюровских и ионно-звуковых волн можно ограничиться электростатическим приближением, так как фазовые скорости много меньше скорости света c (фазовая скорость ионно-звуковых волн порядка v_{Ti} , ленгмюровских – порядка v_{Te}). В следующих двух разделах рассматриваются волны в плазме с магнитным полем (МГД-волны) – альфвеновская и магнитозвуковая. Такие волны непотенциальны, они возмущают внешнее магнитное поле, и, следовательно, их следует рассматривать как электромагнитные.

5.4. Альфвеновские волны

Альфвеновская волна – низкочастотная ($\omega \ll \omega_{ci}$) поперечная электромагнитная волна, распространяющаяся в замагниченной плазме вдоль внешнего магнитного поля. Волновой вектор \mathbf{k} параллелен невозмущенному магнитному полю \mathbf{B}_0 , электрическое поле волны $\tilde{\mathbf{E}}$ и магнитное поле волны $\tilde{\mathbf{B}}$ перпендикулярны вектору \mathbf{B}_0 (рис. 5.1а).

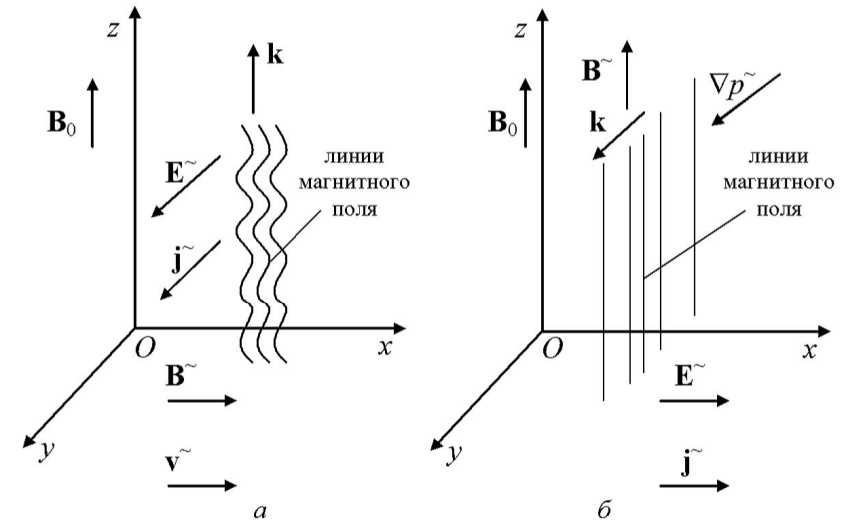


Рис. 5.1. Схемы альфвеновской (а) и магнитозвуковой (б) волн

Дисперсионное уравнение получим из одножидкостного уравнения движения, уравнений Максвелла и закона Ома в пределе бесконечной про-

водимости ($\sigma \rightarrow \infty$). Соответствующие уравнения для возмущенных величин:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}^{\sim}}{\partial t} = \mathbf{j}^{\sim} \times \mathbf{B}_0 \quad \text{или} \quad -i\omega \rho \mathbf{v}^{\sim} = -\mathbf{j}^{\sim} B_0, \quad (5.4.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}^{\sim} = \mu_* \mu_0 \mathbf{j}^{\sim} \quad \text{или} \quad -ikB^{\sim} = \mu_* \mu_0 \mathbf{j}^{\sim}, \quad (5.4.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}^{\sim} = -\frac{\partial \mathbf{B}^{\sim}}{\partial t} \quad \text{или} \quad kE^{\sim} = \omega B^{\sim}, \quad (5.4.3)$$

$$\mathbf{E}^{\sim} + \mathbf{v}^{\sim} \times \mathbf{B}_0 = \frac{\mathbf{j}^{\sim}}{\sigma} \quad \text{или} \quad E^{\sim} + v^{\sim} B_0 = \frac{J^{\sim}}{\sigma}. \quad (5.4.4)$$

Выразим из (5.4.2) B^{\sim} и подставим в (5.4.3), откуда выразим E^{\sim} и подставим в закон Ома (5.4.4). Откуда получим скорость

$$v^{\sim} = -i \frac{\omega \mu_* \mu_0 J^{\sim}}{k^2 B_0} + \frac{J^{\sim}}{\sigma B_0}. \quad (5.4.5)$$

Подставив скорость (5.4.5) в (5.4.1) в пределе $\sigma \rightarrow \infty$ получим дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{B_0^2}{\mu_* \mu_0 \rho} \quad (5.4.6)$$

и фазовую скорость волны (альфвеновскую скорость)

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{\mu_* \mu_0 \rho}}. \quad (5.4.7)$$

Покажем, что конечная проводимость способствует затуханию альфвеновских волн. С учетом конечной проводимости дисперсионное уравнение имеет вид

$$\frac{\omega^2}{k^2} = \frac{B_0^2}{\mu_* \mu_0 \rho} - i \frac{\omega}{\mu_* \mu_0 \sigma}, \quad (5.4.8)$$

а частота – уже не действительная, а комплексная величина $\omega = \omega_R + i\gamma$, где $\omega_R = \text{Re}(\omega)$ – действительная частота, $\gamma = \text{Im}(\omega)$ – инкремент.

Амплитуда в этом случае изменяется пропорционально $\exp(\gamma t)$, следовательно, при $\gamma > 0$ волна нарастает (неустойчива), при $\gamma < 0$ – затухает (устойчива).

Предполагая малость инкремента ($|\gamma| \ll \omega_R$) из дисперсионного уравнения (5.4.8) получим $\omega_R \approx kv_A$, $\gamma = -\frac{k^2}{2\mu_* \mu_0 \sigma} < 0$ (затухание). Альф-

веновские волны существуют при слабом затухании в хорошо проводящей плазме. В ряде случаев они могут оказаться неустойчивыми, если существует механизм передачи энергии от частицы к волне. Такой механизм – резонансное взаимодействие с высокоэнергетичными частицами, движущимися со скоростями, близкими к v_A . Однако для учета такого резонанса необходим кинетический подход.

5.5. Магнитозвуковые волны

В простейшем случае магнитозвуковая волна – низкочастотная электромагнитная волна, распространяющаяся поперек внешнего магнитного поля \mathbf{B}_0 . Направления векторов возмущений \mathbf{B}^{\sim} , \mathbf{E}^{\sim} , \mathbf{j}^{\sim} и ∇p^{\sim} для магнитозвуковой волны показано на рис. 5.1б. Из уравнений Максвелла находим

$$ikB^{\sim} = \mu_0 J^{\sim} - \frac{i\omega E^{\sim}}{c^2}, \quad (5.5.1)$$

$$-ikE^{\sim} = i\omega B^{\sim}. \quad (5.5.2)$$

Исключая B^{\sim} , получаем

$$\varepsilon_0 (\omega^2 - c^2 k^2) E^{\sim} = -i\omega j^{\sim} = -i\omega e n_0 (v_{xi}^{\sim} - v_{xe}^{\sim}), \quad (5.5.3)$$

где $n_0 = n_{e0} = n_{i0}$, а также учтено, что $c = 1/\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$.

Проекции уравнений движения и уравнения неразрывности для ионной и электронной компонент в принятой нами системе координат (см. рис. 5.1) выглядят следующим образом

$$-i\omega m_{i,e} v_{i,ex}^{\sim} = q_{i,e} E^{\sim} + q_{i,e} v_{i,ey}^{\sim} B_0. \quad (5.5.4)$$

$$-i\omega m_{i,e} n_0 \tilde{v}_{i,ey} = -n_0 q_{i,e} \tilde{v}_{i,ex} B_0 - ik \kappa_{i,e} k_B T_{i,e} \tilde{n}_{i,e}. \quad (5.5.5)$$

$$-i\omega \tilde{n}_{i,e} + ik n_0 \tilde{v}_{i,ey} = 0. \quad (5.5.6)$$

Из системы (5.5.4)–(5.5.6) находим возмущенные скорости и подставляем их в (5.5.3). С учетом того, что $\omega_{ci} \gg \omega$, получаем дисперсионное уравнение

$$\omega^2 (v_A^2 + c^2) = c^2 k^2 \left(v_A^2 + \frac{\kappa_e k_B T_e + \kappa_i k_B T_i}{m_i} \right), \quad (5.5.7)$$

или

$$\frac{\omega^2}{k^2} = c^2 \frac{v_s^2 + v_A^2}{c^2 + v_A^2}, \quad (5.5.8)$$

где $v_s^2 = \frac{\kappa_e k_B T_e + \kappa_i k_B T_i}{m_i}$ (при $\kappa_e = 1$ совпадает с (5.3.11)).

В магнитозвуковой волне области сжатия и разрежения образуются из-за $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфа. Рассмотренные выше волны взаимосвязаны. В пределе $B_0 \rightarrow 0$ магнитозвуковая волна переходит в ионно-звуковую (так как $v_A \rightarrow 0$). В холодной плазме ($T_i \rightarrow 0$, $T_e \rightarrow 0$) вариации давления отсутствуют, $v_s \rightarrow 0$ и фазовая скорость магнитозвуковой волны равна альфвеновской скорости.

5.6. Неустойчивые дрейфовые волны в неоднородной плазме с магнитным полем

Дрейфовые волны возникают в замагниченной плазме, удерживаемой магнитным полем, при наличии градиента концентрации (или температуры). В любой плазменной конфигурации конечных размеров всегда есть градиенты, а дрейфовые волны, как правило, оказываются неустойчивыми. В настоящее время дрейфовые неустойчивости считаются одной из наиболее важных причин, вызывающих интенсивный турбулентный перенос плазмы поперек магнитного поля в магнитных ловушках.

Рассмотрим дрейфовую неустойчивость в рамках гидродинамического подхода. Использование этого подхода упрощает задачу, по результатам получается скорее качественным, а не количественным. Для более

строгого анализа необходим кинетический подход. Будем также считать, что применимо электростатическое приближение.

Дрейфовые волны оказываются неустойчивыми при наличии даже небольшого сдвига фаз $\alpha \ll 1$ между возмущениями концентрации электронов n_e и электростатического потенциала ϕ . Сдвиг фаз может возникать из-за столкновений, а также из-за инерции ионов, ограничивающих движение электронов. В рассматриваемом случае необходимый для неустойчивости сдвиг фаз возникает из-за инерции.

Так как для дрейфовых волн $kr_D \ll 1$, то колебания следует считать квазинейтральными. Считаем, что для электронов выполняется больцмановское приближение. В формуле Больцмана учтем, что возмущение концентрации электронов отстает по фазе от потенциала волны. В используемом здесь приближении (Scott, 2000) для учета сдвига фаз формула Больцмана (5.1.4) модифицируется следующим образом:

$$\frac{n_e}{n_{e0}} = \frac{e\phi}{k_B T_e} \exp(-i\alpha) \approx \frac{e\phi}{k_B T_e} (1 - i\alpha) \quad (5.6.1)$$

или

$$\frac{e\phi}{k_B T_e} = \frac{n_e}{n_{e0}} (1 + i\alpha), \quad (5.6.2)$$

где при $\alpha > 0$ возмущение концентрации электронов отстает по фазе от потенциала.

Используем условие квазинейтральности

$$\frac{n_i}{n_{i0}} = \frac{n_e}{n_{e0}}. \quad (5.6.3)$$

Уравнения неразрывности для ионов имеет вид

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_i v_{ix}) + \frac{\partial}{\partial y}(n_i v_{iy}) + \frac{\partial}{\partial z}(n_i v_{iz}) = 0, \quad (5.6.4)$$

где $n_i = n_{i0} + \tilde{n}_i$, $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_{i0} + \tilde{\mathbf{v}}_i$, \mathbf{v}_{i0} – невозмущенная гидродинамическая скорость ионов.

Выберем координатные оси так, что магнитное поле направлено вдоль оси z , а градиенты концентрации и температуры – вдоль оси x . Волновой вектор неустойчивых дрейфовых волн имеет две компоненты: k_y –

поперек магнитного поля (вдоль оси y) и k_{\parallel} – вдоль магнитного поля. Считаем, что возмущения зависят от y , z и t , а невозмущенные величины (концентрация n_{i0} , давление p_{i0} , температура T_{i0} и скорость \mathbf{v}_{i0}) – только от x . При этом скорость \mathbf{v}_{i0} направлена вдоль y .

Входящие в уравнение неразрывности компоненты потока ионов поперек магнитного поля (в направлениях x и y) найдем с использованием выражений для скоростей $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ -дрейфа и диамагнитного дрейфа. Если пренебречь слагаемыми второго порядка малости, то компоненты потока равны соответственно

$$n_i v_{ix} = -\frac{n_{i0}}{B} \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} - \frac{1}{Z_i e B} \frac{\partial p_i}{\partial y}, \quad (5.6.5)$$

$$n_i v_{iy} = -\frac{E_0}{B} n_i - \frac{E_0}{B} n_{i0} + \frac{1}{Z_i e B} \frac{\partial p_{i0}}{\partial x}, \quad (5.6.6)$$

где Z_i – заряд иона; E_0 – напряженность статического электрического поля, обычно существующего в неоднородной плазме.

Из (5.6.6) ясно, что гидродинамическая скорость ионов равна

$$v_{i0} = -\frac{E_0}{B} + \frac{1}{Z_i e n_{i0} B} \frac{\partial p_{i0}}{\partial x}. \quad (5.6.7)$$

Используя (5.6.5) и (5.6.6) запишем:

$$\frac{\partial}{\partial x} (n_i v_{ix}) = -\frac{i k_y}{B} \frac{\partial n_{i0}}{\partial x} \tilde{\varphi}, \quad (5.6.8)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (n_i v_{iy}) = -i k_y \frac{E_0}{B} n_i. \quad (5.6.9)$$

Продольную скорость ионов найдем из проекции уравнения движения на направление магнитного поля:

$$-i(\omega - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}_0) v_{iz} = -i k_{\parallel} \frac{Z_i e \tilde{\varphi}}{m_i} - i k_{\parallel} \frac{p_i}{m_i n_{i0}}, \quad (5.6.10)$$

откуда следует

$$\frac{\partial}{\partial z} (n v_{iz}) = \frac{i k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}{\omega - k_y v_{i0}} \left[Z_i \frac{e \tilde{\varphi}}{k_B T_i} + \frac{n_i}{n_{i0}} \left(1 + \frac{n_{i0} T_i}{T_{i0} n_i} \right) \right], \quad (5.6.11)$$

где $v_{Ti} = \sqrt{\frac{k_B T_i}{m_i}}$ – тепловая скорость ионов; $\frac{n_{i0} T_i}{T_{i0} n_i} \approx \frac{n_{i0} dT_i}{T_{i0} dn_i} = \eta_i$.

С учетом (5.6.8), (5.6.9) и (5.6.11) уравнение неразрывности принимает вид

$$-i \omega n_i - \frac{i k_y}{B} \frac{\partial n_{i0}}{\partial x} \tilde{\varphi} - i k_y \frac{E_0}{B} n_i + \frac{i k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}{\omega - k_y v_{i0}} \left[Z_i \frac{e \tilde{\varphi}}{k_B T_i} + \frac{n_i}{n_{i0}} (1 + \eta_i) \right] = 0. \quad (5.6.12)$$

Подставив в (5.6.12) выражение для потенциала волны, следующее из (5.6.2), получаем дисперсионное уравнение

$$\omega - k_y v_* (1 + i\alpha) + k_y \frac{E_0}{B} + \frac{i k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}{\omega - k_y v_{i0}} \left[Z_i \frac{T_e}{T_i} (1 + i\alpha) + 1 + \eta_i \right] = 0, \quad (5.6.13)$$

где $v_* = -\frac{k_B T_e}{e B n_{i0}} \frac{\partial n_{i0}}{\partial x} = -\frac{k_B T_e}{e B n_{e0}} \frac{\partial n_{e0}}{\partial x}$; причем $v_* > 0$, так как в плазме концентрация спадает в направлении от центральных областей к периферии, следовательно, $\frac{1}{n_{i0}} \frac{\partial n_{i0}}{\partial x} = \frac{1}{n_{e0}} \frac{\partial n_{e0}}{\partial x} < 0$.

Рассмотрим решение (5.6.13) в пределе $k_{\parallel} \rightarrow 0$. Действительная часть частоты в этом случае

$$\omega_R = \text{Re}(\omega) = k_y v_* - k_y \frac{E_0}{B}, \quad (5.6.14)$$

а инкремент (мнимая часть частоты)

$$\gamma = \text{Im}(\omega) = \alpha k_y v_*. \quad (5.6.15)$$

При $\alpha > 0$ дрейфовые волны неустойчивы ($\gamma > 0$). В этом случае электроны отдают волне свою энергию, т.е. раскачивают неустойчивость.

В пределе $k_{\parallel} \rightarrow 0$ мы получили, что дрейфовые волны могут распространяться строго поперек силовых линий магнитного поля. В действительности рассмотренные электростатические дрейфовые волны являются косыми ($k_{\parallel} \neq 0$), так как больцмановское распределение электронов в поле

волны может устанавливаться только за счет их движения вдоль магнитного поля.

Сдвиг фазы α , вообще говоря, не является постоянной величиной, и может зависеть от частоты. Чтобы найти выражение для сдвига фаз в явном виде необходимо учесть столкновения, а в бесстолкновительном случае – рассмотреть задачу в рамках кинетического подхода. В первом случае имеют место так называемые резистивные дрейфовые волны (*см. обзор: Тимофеев, Швилкин, 1976*). Для бесстолкновительной плазмы кинетический подход дает дисперсионные уравнения градиентных дрейфовых неустойчивостей, играющих крайне важную роль в транспортных процессах в системах магнитного удержания плазмы.

Цитированная литература

Власов А.А. О вибрационных свойствах электронного газа // ЖЭТФ. 1938. Т. 8, №3. С.291; см также: *Власов А.А.* Теория многих частиц. М.: Гостехиздат, 1950.

Ландау Л.Д. О колебаниях электронной плазмы // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. С. 574.

Сивухин Д.В. Кулоновские столкновения в полностью ионизированной плазме // Вопросы теории плазмы. 1964. Вып. 4. С. 81-187.

Тимофеев А.В., Швилкин Б.Н. Дрейфово-диссипативная неустойчивость неоднородной плазмы в магнитном поле // УФН. 1976. Т. 118, Вып. 2. С. 273–306.

Scott В. Low frequency fluid drift turbulence in magnetised plasma. Dusseldorf: Heinrich–Heine–Universität, 2000. – 354 p.

ЛИТЕРАТУРА для самостоятельного изучения курса

Голант В.Е., Жилинский А.П., Сахаров И.Е. Основы физики плазмы. М.: Атомиздат, 1977.

Кингсеп А.С. Введение в нелинейную физику плазмы. М.: Изд-во МФТИ, 1996.

Клеммоу Ф., Доуэрти Дж. Электродинамика частиц и плазмы: Пер. с англ. М.:1996.

Козлов Н.П. Основы физики плазмы. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1997.

Кролл Н., Трайвеллис А. Основы физики плазмы. М.: Мир, 1975.

Лукьянов С. Ю., Ковальский Н. Г. Горячая плазма и управляемый термоядерный синтез. М.: Изд-во МИФИ, 1999.

Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1992.

Трубников Б.А. Теория плазмы. М: Энергоатомиздат, 1996.

Хвесюк В.И., Чирков А.Ю. Волны и неустойчивости в высокотемпературной плазме. М.: Изд.-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2009.

Чен Ф. Введение в физику плазмы: Пер. с англ. М.: Мир, 1987.

Чирков А.Ю. Введение в физику плазмы. М.: Изд.-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2006.