1.8 Зацикливание и Антициклины

Заметим, что если X невырождено, то разрешающий элемент определен однозначно на каждом шаге. В вырожденном случае возникает неоднозначность, которая реально может приводить к зацикливанию. Приведем соответствующий пример.

Рассмотрим задачу $f(x) = x^1 - x^4 - x^5 + x^6 \to \inf$ при $x \in X \subset \mathbb{R}^7$, где

$$x^1 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 = 1, \quad -2x^1 + x^2 + x^4 - 3x^5 + 4x^6 = 0, \quad 3x^1 + x^3 + 4x^4 - 2x^5 + x^6 = 0.$$

Точка $v_0 = (0,0,0,0,0,0,1)$ является вырожденной угловой точкой с базисом (A_7, A_2, A_3). Симплекс процесс этой задачи допускает зацикливание. А именно, можно так выбирать разрешающие элементы, что угловая точка меняться не будет, а базисы сформируют цикл $(A_7, A_2, A_3) \to (A_7, A_4, A_3) \to (A_7, A_4, A_1) \to (A_7, A_5, A_1) \to (A_7, A_5, A_6) \to (A_7, A_2, A_6) \to (A_7, A_2, A_3)$. Соответствующие симплекс-таблицы выглядят так:

	б к	v	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
Γ_1	x^7	1	1	0	0	1	1	1	1
Γ_2	x^2	0	-2	1	0	$\underline{1}$	-3	4	0
Γ_3	x^3	0	-3	0	1	4	-2	1	0
Δ		0	-1	0	0	1	1	-1	0

Разрешающие элементы $\gamma_{24}, \gamma_{34}, \gamma_{15}$, выберем γ_{24}.

	б к	v	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
Γ_1	x^7	1	3	-1	0	0	4	-3	1
Γ_2	x^4	0	-2	1	0	1	-3	4	0
Γ_3	x^3	0	$\underline{5}$	-4	1	0	10	-15	0
Δ		0	1	-1	0	0	4	-5	0

Разрешающие элементы γ_{31}, γ_{35}, выберем γ_{31}.

	б к	v	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
Γ_1	x^7	1	0	$7/5$	0	0	-2	6	1
Γ_2	x^4	0	0	$-3/5$	0	1	$\underline{1}$	-2	0
Γ_3	x^1	0	1	$-4/5$	1	0	2	-3	0
Δ		0	0	$-1/5$	0	0	2	-2	0

Разрешающие элементы γ_{25}, γ_{35}, выберем γ_{25}.

	б к	v	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
Γ_1	x^7	1	0	$1/5$	$1/5$	2	0	2	1
Γ_2	x^5	0	0	$-3/5$	$2/5$	1	1	-2	0
Γ_3	x^1	0	1	$2/5$	$-3/5$	-2	0	$\underline{1}$	0
Δ		0	0	1	-1	-2	0	2	0

Разрешающие элементы γ_{32}, γ_{36}, выберем γ_{36}.

	б к	v	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
Γ_1	x^7	1	-2	$-3/5$	$7/5$	6	0	0	1
Γ_2	x^5	0	2	$1/5$	$-4/5$	-3	1	0	0
Γ_3	x^6	0	1	$2/5$	$-3/5$	-2	0	1	0
Δ		0	-2	$1/5$	$1/5$	2	0	0	0

Разрешающие элементы $\gamma_{22}, \gamma_{23}, \gamma_{13}, \gamma_{14}$, выберем γ_{22}.

	б к	v	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
Γ_1	x^7	1	4	0	-1	-3	3	0	1
Γ_2	x^2	0	10	1	-4	-15	5	0	0
Γ_3	x^6	0	-3	0	1	4	-2	1	0
Δ		0	-4	0	1	5	-1	0	0

Разрешающие элементы γ_{33}, γ_{34}, выберем γ_{33}.

	б к	v	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
Γ_1	x^7	1	1	0	0	1	1	1	1
Γ_2	x^2	0	-2	1	0	1	-3	4	0
Γ_3	x^3	0	-3	0	1	4	-2	1	0
Δ		0	-1	0	0	1	1	-1	0

Круг замкнулся.

Антициклином называется любое уточняющее правило, позволяющее избежать зацикливания симплекс-процесса.

Будем говорить, что вектор $x \in \mathbb{R}^n$ *лексикографически положителен*, $0 \prec x$, если $x \neq 0$ и первая ненулевая координата вектора x положительна. Далее, вектор y *лексикографически больше чем* x, если $x \prec y$, если $0 \prec y - x$. Другими словами, $x \prec y$, если существует такое p, $1 \leq p \leq n$, что $x^1 = y^1, \ldots, x^{p-1} = y^{p-1}$, $x^p < y^p$.

Пусть M_0 — конечное множество номеров, и пусть $Y = \{x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n) \in \mathbb{R}^n, i \in M_0\}$. Вектор $x_s \in Y$ называется *лексикографическим минимумом множества* Y, если для всех $i \in M_0$ или $x_s \prec x_i$, или $x_i = x_s$. Обозначим $x_s = \operatorname{lex}\min_{i \in M_0} x_i$.

Лемма 1.10. *Пусть M_0 — конечное множество номеров, и пусть во множестве $Y = \{x_i = (x_i^1, \ldots, x_i^n) \in \mathbb{R}^n, i \in M_0\}$ все векторы различны. Тогда лексикографический минимум множества Y достигается на единственном векторе $x_s \in Y$. При этом, если последовательно строить множества*

$$M_1 = \{j \in M_0 : x_j^1 = \min\nolimits_{i \in M_0} x_i^1\}, \ldots, M_p = \{j \in M_{p-1} : x_j^p = \min\nolimits_{i \in M_{p-1}} x_i^p\},$$

до те пор, пока не найдется M_q, состоящее из единственного элемента s, то x_s и есть искомый.

Доказательство. Если нашлось множество M_q, состоящее из одного элемента, то на этом элементе достигается лексикографический минимум. Далее, заметим, что любые два вектора из $\mathbb{R}^n$ лексикографически сравнимы. Если же очередном шаге множество M_q не меняется, то все элементы в этом M_q лексикографически равны, и значит просто равны. Последнее противоречит тому, что все элементы множества Y попарно различны. □

Симплекс-таблица $S = S(v, B)$ называется *лексикографически положительной*, пишем $S \overset{\Gamma}{\succ} 0$, если $0 \prec \Gamma_i$ для всех $i = 1, \ldots, r$. Далее, будем говорить, что $S_1 = S(v_1, B_1)$ *лексикографически больше* чем $S_2 = S(v_2, B_2)$, и записывать $S_1 \overset{\Delta}{\succ} S_2$, если $\Delta_1 \succ \Delta_2$.

Лемма 1.11. *Если угловая точка v с базисом B невырождена, то $0 \prec S(v, B)$.*

Доказательство. Действительно, все базисные координаты невырожденной угловой точки положительны, поэтому все строки Γ_i симплекс-таблицы лексикографически положительны (их первые компоненты положительны). □

Замечание 1.12. Перенумеровав переменные так, чтобы базисные переменные стали первыми, можно сделать положительной симплекс-таблицу вырожденной точки.

Антициклин. В невырожденном случае симплекс-таблицы последовательных угловых вершин $v_0, \ldots, v_p$ строго лексикографически упорядочены, а именно, $S(v_1) \overset{\Delta}{\succ} \cdots \overset{\Delta}{\succ} S(v_p)$. Идея в том, чтобы составить правила выбора разрешающего элемента так, чтобы последовательность соответствующих симплекс-таблиц была бы лексикографически упорядочена.

Пусть v — угловая точка множества X с базисом $B = (A_{j_1}, \ldots, A_{j_r})$ и симплекс таблицей $S = S(v, B)$. Пусть реализовался Случай 3, описанный выше, и уже выбран номер $k \notin I(v)$, $k > 0$. Выберем номер s и разрешающий элемент γ_{sk} из условия

$$\frac{\Gamma_s}{\gamma_{sk}} = \operatorname{lex}\min_{i \in I_k(v)} \frac{\Gamma_i}{\gamma_{ik}}, \qquad s \in I_k(v) = \{i : 1 \le i \le r, \gamma_{ik} > 0\}$$

Лемма 1.13. *Это правило позволяет однозначно определить s.*

Доказательство. Согласно лемме 1.10, нужно показать, что множество $Y = \big\{x = \Gamma_i/\gamma_{ik}, i \in I_k(v) = M_0\big\}$ состоит из попарно различных векторов. Предположим противное, тогда $\Gamma_i/\gamma_{ik} = \Gamma_j/\gamma_{jk}$ для некоторых i, $j \in I_k(v)$, $i \neq j$. Тогда $\Gamma_i = \lambda\Gamma_j$, $\lambda = \gamma_{ik}/\gamma_{jk}$, то есть матрица $(B^{-1}b, B^{-1}A_1, \ldots, B^{-1}A_n$ содержит пропорциональные строки. С другой стороны, ранг расширенной матрицы (b, A) равен рангу матрицы A, так как система $Av = b$ разрешима (теорема Кронекера–Капелли), матрица B невырождена, поэтому $\operatorname{rank}(B^-1b, B^{-1}A) = \operatorname{rank}A = r$, противоречие. □

Таким образом, элемент s, на котором достигается минимум, можно искать так, как описано в лемме 1.10. Заметим, что на первом шаге этого алгоритма строится множество

$$M_1 = \{s \in M_0 = I_k(v) : \gamma_{s0}/g_{sk} = \min_{i\in M_0}\gamma_{i0}/g_{ik}\},$$

а это и есть множество тех самых номеров s из которых мы выбирали разрешающие элементы. Если M_1 состоит из одного элемента, то оба способа дают нам один и тот же разрешающий элемент.

Теорема 2. *Пусть в канонической задаче множество X непусто,* $\mathrm{rank}A = r = m < n$*, и v_0 — некоторая угловая точка этого множества с симплекс-таблицей $S_0 \overset{\Gamma}{\succ} 0$. Тогда симплекс-процесс, начинающийся с угловой точки v_0, при выборе разрешающих элементов с помощью условия лексикографического минимума завершается за конечное число шагов.*

Доказательство. Итак выберем разрешающий элемент $\gamma_{sk}(v)$ и совершим переход от симплекс-таблицы $S(v,B)$ к симплекс-таблице $S(w,\bar{B})$. Оказывается, если $S(v,B) \overset{\Gamma}{\succ} 0$, то имеют место неравенства

$$S(w,\bar{B}) \overset{\Gamma}{\succ} 0, \qquad S(v,B) \overset{\Delta}{\succ} S(w,\bar{B}).$$

Действительно, если $S(v,B) \overset{\Gamma}{\succ} 0$, то по определению $\Gamma_i(v) \succ 0$, $i = 1,\dots,r$. Так как $\gamma_{sk}(v) > 0$, то $\Gamma_s(w) = \Gamma_s(v)/\gamma_{sk}(v) \succ 0$.

Пусть теперь $i \neq s$. Пусть сначала $\gamma_{ik} > 0$. Это означает, что $i \in I_k(v)$ и по анициклиновому правилу $\Gamma_i(v)/\gamma_{ik}(v) \succ \Gamma_s(v)/\gamma_{sk}(v)$, откуда $\Gamma_i(v) \succ \gamma_{ik}(v)/\gamma_{sk}(v)\Gamma_s(v)$, откуда

$$\Gamma_i(w) = \Gamma_i(v) - \frac{\gamma_{ik}(v)}{\gamma_{sk}(v)}\Gamma_s(v) \succ 0.$$

Если же $\gamma_{ik} \le 0$, то $-\gamma_{ik}(v)/\gamma_{sk}(v) \ge 0$ и

$$\Gamma_i(w) = \Gamma_i(v) + \Big(-\frac{\gamma_{ik}(v)}{\gamma_{sk}(v)}\Big)\Gamma_s(v) \succ 0.$$

Таким образом, каждая строка $\Gamma_i(w) \succ 0$, $i = 1,\dots,r$, откуда $S(w,\bar{B}) \overset{\Gamma}{\succ} 0$.

Наконец, так как $\Gamma_s(w) \succ 0$ и $\Delta_k(v) > 0$, то $\Delta(w) = \Delta(v) - \Delta_k(v)\Gamma_s(w) \prec \Delta(v)$, откуда $S(v,B) \overset{\Delta}{\succ} S(w,\bar{B})$.

Итак, если подправленный описанным выше антициклином симплекс-процесс приводит к последовательности лексикографически убывающих, а значит не повторяющихся, симплекс-таблиц. Поэтому за конечное число шагов процесс закончится. □

Применим описанный антициклин к предыдущему зацикливающемуся примеру.

Напомним, что мы рассматривали задачу $f(x) = x^1 - x^4 - x^5 + x^6 \to \inf$ при $x \in X \subset \mathbb{R}^7$, где

$$x^1+x^4+x^5+x^6+x^7 = 1, \quad -2x^1+x^2+x^4-3x^5+4x^6 = 0, \quad 3x^1+x^3+4x^4-2x^5+x^6 = 0.$$

Точка $v_0 = (0,0,0,0,0,0,1)$ — вырожденная угловая точка с базисом (A_7, A_2, A_3). Соответствующая симплекс-таблица выглядела так:

	б к	v_0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
Γ_1	x^7	1	1	0	0	1	1	1	1
Γ_2	x^2	0	-2	1	0	$\underline{1}$	-3	4	0
Γ_3	x^3	0	-3	0	1	4	-2	1	0
Δ		0	-1	0	0	1	1	-1	0

Сначала переставим переменные так, чтобы таблица стала лексикографически положительной. Для этого переставим вперед столбцы переменных x^2 и x^3, не переобозначая переменные. Получим

	б к	v_0	x^2	x^3	x^1	x^4	x^5	x^6	x^7
Γ_1	x^7	1	0	0	1	1	1	1	1
Γ_2	x^2	0	1	0	-2	1	-3	4	0
Γ_3	x^3	0	0	1	-3	4	-2	1	0
Δ		0	0	0	-1	1	1	-1	0

В строке Δ полученной таблицы $\Delta_4 = 1$ и весь 4-ый столбец заполнен положительными числами. Поэтому $I_4(v_0) = \{1,2,3\}$. Чтобы применить антициклин нужно выписать строки Γ_i/γ_{ik}:

$$\frac{\Gamma_1}{\gamma_{14}} = (1,0,0,1,1,1,1,1), \quad \frac{\Gamma_2}{\gamma_{24}} = (0,1,0,-2,1,-3,4,0), \quad \frac{\Gamma_3}{\gamma_{34}} = \Big(0,0,\frac{1}{4},-\frac{3}{4},1,-\frac{1}{2},\frac{1}{4},0\Big).$$

Имеем: $M_0 = \{1,2,3\}$, $M_1 = \{2,3\}$, $M_2 = \{3\}$, $\operatorname{lex}\min\{\Gamma_i/\gamma_{i4}\} = \Gamma_3/\gamma_{34}$, поэтому выбираем разрешающий элемент γ_{34}. Делаем шаг:

	б к	v_1	x^2	x^3	x^1	x^4	x^5	x^6	x^7
Γ_1	x^7	1	0	$-1/4$	$7/4$	0	$3/2$	$3/4$	1
Γ_2	x^2	0	1	$-1/4$	$-5/4$	0	$-5/2$	$15/4$	0
Γ_3	x^4	0	0	$1/4$	$-3/4$	1	$-1/2$	$1/4$	0
Δ		0	0	$-1/4$	$-1/4$	0	$3/2$	$-5/4$	0

Угловая точка та же, базис другой (A_7, A_2, A_4). Теперь разрешающий элемент выбирается однозначно, это γ_{15}. Делаем шаг:

	б к	v_2	x^2	x^3	x^1	x^4	x^5	x^6	x^7
Γ_1	x^5	$2/3$	0	$-1/6$	$7/6$	0	1	$1/2$	$2/3$
Γ_2	x^2	$5/3$	1	$-2/3$	$5/3$	0	0	5	$5/3$
Γ_3	x^4	$1/3$	0	$1/6$	$-1/6$	1	0	$1/2$	$1/3$
Δ		-1	0	0	-2	0	0	-2	-1

Теперь все элементы последней строки неположительны, значит симплекс процесс останавливается, $v_2 = (0, 5/3, 0, 1/3, 2/3, 0, 0)$, $f(v_2) = f_* = -1$.