

1.9 Начальная угловая точка и условия разрешимости

Будем рассматривать каноническую задачу

$$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax = b\},$$

где $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\text{rank} A = r \leq m < n$. Наша цель — научиться проверять множество X на пустоту, искать в нем какую-нибудь угловую точку и ее базис и ее симплекс-таблицу. Замечательным является тот факт, что для ответа на все эти вопросы можно составить вспомогательную задачу, которую и решить описанным выше методом. Этот метод называется *метод искусственного базиса*.

Без ограничения общности будем предполагать, что $b \geq 0$ (если какая-нибудь компонента исходного вектора b оказалась меньше нуля, то умножим это уравнение на -1). Введем вспомогательные (искусственные) переменные (u^1, \dots, u^m) , припишем их спереди, образовав тем самым пространство \mathbb{R}^{n+m} с координатами $y = (u, x)$, и рассмотрим в нем следующую каноническую задачу:

$$g(y) = u^1 + \dots + u^m = \langle \mathbb{I}_m, u \rangle \rightarrow \inf, \quad y \in Y = \{y \in \mathbb{R}^{n+m} : y \geq 0, Cy = u + Ax = b\},$$

где $\mathbb{I}_m = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^m$, $C = (E_m, A)$, то есть $Cy = u + Ax$. Допустимым точкам исходной задачи соответствуют допустимые точки вспомогательной задачи вида $(0, x)$.

Множество Y не пусто, оно содержит, например, точку $z_0 = (b, 0) \geq 0$. Более того, из утверждения 1.2 следует, что z_0 является угловой точкой множества Y с базисом $E_m = (e_1, \dots, e_m)$. Система $Cy = b$ является приведенной системой угловой точки z_0 , $\text{rank} C = m$. Приведенный вид целевой функции: $g(y) = \langle \mathbb{I}_m, u \rangle = \langle \mathbb{I}_m, b - Ax \rangle = g(z_0) - \langle A^T \mathbb{I}_m, x \rangle$. Симплекс-таблица точки z_0 с базисом (e_1, \dots, e_m) имеет вид:

	B	v	u^1	\dots	u^i	\dots	u^m	x^1	\dots	x^j	\dots	x^n
Γ_1	u^1	b^1	1	\dots	0	\dots	0	a_{11}	\dots	a_{1j}	\dots	a_{1n}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
Γ_i	u^i	b^i	0	\dots	1	\dots	0	a_{i1}	\dots	a_{ij}	\dots	a_{in}
\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots	\dots
Γ_m	u^m	b^m	0	\dots	0	\dots	1	a_{m1}	\dots	a_{mj}	\dots	a_{mn}
Δ		Δ_0	0	\dots	0	\dots	0	Δ_1	\dots	Δ_j	\dots	Δ_n

Заметим, что так как компоненты целевой функции, отвечающие не базисным переменным, равны нулю,

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^m b^i = g(z_0), \quad \Delta_j = \sum_{i=1}^m a_{ij}.$$

Кроме того, симплекс-таблица $S(z_0, E_m)$ лексикографически гамма-положительна. Поэтому мы можем решить вспомогательную задачу симплекс-методом с антициклином.

Заметим, что $g(y) \geq 0$ при всех $y \in Y$, поэтому $g_* = \inf_Y g(y) \geq 0$, и случай $g_* = -\infty$ невозможен. Поэтому, взяв z_0 в качестве начальной угловой вершины, мы, с помощью симплекс-метода с антициклином за конечное число шагов найдем угловую точку $z_* = (u_*, v_*)$ множества Y , являющуюся решением вспомогательной задачи, $g(z_*) = g_* \geq 0$. Имеется две возможности, или $g(z_*) > 0$, или $g(z_*) = 0$.

Если $0 < g(z_*) = u_*^1 + \dots + u_*^m$, то $u_* \neq 0$ и оказывается, что множество X пусто. Действительно, если существует точка $x_0 \in X$, то $y_0 = (0, x_0) \in Y$, причем $g(y_0) = 0 < g_*$, противоречие.

Пусть теперь $g(z_*) = u_*^1 + \dots + u_*^m = 0$. Тогда $z_* = (0, v_*)$ — угловая точка множества Y . Покажем, что v_* — угловая точка множества X . Так как $z_* \geq 0$, то $v_* \geq 0$, и так как $Cz_* = b$, то $Av_* = b$, таким образом, $v_* \in X$. Теперь рассмотрим представление

$$v_* = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x_1, x_2 \in X,$$

и покажем, что такое равенство возможно только при $v_* = x_1 = x_2$. Точки $y_1 = (0, x_1)$, $y_2 = (0, x_2)$ принадлежат Y . Но тогда $z_* = \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2$, $0 < \alpha < 1$. Однако, точка z_* — угловая точка множества Y , поэтому это представление возможно только при $z_* = y_1 = y_2$. Отсюда следует, что $v_* = x_1 = x_2$, поэтому v_* — угловая точка множества X . Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема 3. Если множество $X = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax = b\}$ не пусто, то оно имеет хотя бы одну угловую точку.

Замечание 1.14. Проверить не пусто ли множество X и найти угловую точку v_* можно методом искусственного базиса с использованием симплекс-метода. После того как найдены координаты точки v_* можно определить номера базисных переменных и ранг матрицы A . А именно, положительные координаты $(v_*^{j_1}, \dots, v_*^{j_k})$ точки v_* заведомо являются базисными. Остается добавить любые столбцы, дополняя его до базиса B . После этого методом Гаусса выразим базисные переменные через остальные и исключим зависимые уравнения. В результате получим приведенную систему угловой точки v_* с базисом B . Теперь все готово, чтобы применять симплекс-метод.

Теорема 4. Каноническая задача разрешима, т.е. существует такая точка $x_* \in X$, что $\langle c, x_* \rangle = f_* = \inf_{x \in X} \langle c, x \rangle$, тогда и только тогда, когда X не пусто, а f ограничена на X снизу.

Доказательство. Необходимость очевидна: X содержит x_* , а f_* ограничивает f снизу. Обратное, если X не пусто, то по теореме 3 X содержит угловую точку. Взяв ее в качестве начальной и применив симплекс-метод с антициклином найдем решение, которое отделено от бесконечности и, значит, конечно. \square

Теорема 5. Если каноническая задача разрешима, то среди ее решений найдется хотя бы одна угловая точка.

Доказательство. Это очевидно: так как X не пусто и в нем существует точка x_* , для которой $f(x_*) = f_* > -\infty$. Тогда в X существует угловая точка, и симплекс метод приведет нас у угловой точке, являющейся решением. \square

1.10 Другой алгоритм поиска приведенной системы начальной угловой точки

Описанный выше метод построения приведенной системы угловой точки v_* , найденной методом искусственного базиса на самом деле довольно трудоемок. Тут мы опишем другой, более удобный способ получения приведенной системы точки v_* из симплекс таблицы точки z_* , которая получается применением симплекс-метода к системе $Cz = b$. Так как $m = \text{rank}C \geq \text{rank}A$, то в базис точки z_* могут входить не только столбцы матрицы A , но и столбцы матрицы E_m . Перенумеровав переменные, можно считать, что базисом точки z_* являются столбцы $e_1, \dots, e_{m-p}, A_1, \dots, A_p$ матрицы $C = (E_m, A)$, соответствующие вспомогательным переменным u^1, \dots, u^{m-p} , и основным переменным x^1, \dots, x^p . Приведенная система угловой точки $z_* = (0, v_*)$ имеет вид:

$$0 = u^j + \dots + \gamma'_{j,m-p+1} u^{m-p+1} + \dots + \gamma'_{jm} u^m + \gamma_{j,p+1} x^{p+1} + \dots + \gamma_{jn} x^n, \quad j = 1, \dots, m-p;$$

и

$$v_*^i = \gamma'_{m-p+i,m-p+1} u^{m-p+1} + \dots + \gamma'_{m-p+i,m} u^m + x^i + \gamma_{m-p+i,p+1} x^{p+1} + \dots + \gamma_{m-p+i,n} x^n, \quad i = 1, \dots, p;$$

(столбцы, соответствующие добавленным переменным u мы обозначаем через γ' в отличие от столбцов, соответствующих основным переменным x). Напомним также, базисным переменным соответствуют базисные столбцы (все нули кроме одной единицы). Отметим, что при $u = 0$ эта система превращается в исходную систему $B^{-1}Ax = B^{-1}b$.

Случай 1. Строки, соответствующие вспомогательным переменным u^1, \dots, u^{m-p} в симплекс-таблице отсутствуют. Столбцы A_1, \dots, A_p — базис точки $z_* = (0, v_*)$. Система превращается в систему вида

$$v_*^i = x^i + \gamma_{m-p+i,p+1} x^{p+1} + \dots + \gamma_{m-p+i,n} x^n, \quad i = 1, \dots, p.$$

Это — приведенная система точки v_* с базисом A_1, \dots, A_p . Поэтому, чтобы получить симплекс-таблицу точки v_* нужно просто вычеркнуть все столбцы, соответствующие переменным u^i . Последняя строка имеет вид

$$\Delta_0 = f(v_*), \quad \Delta_1 = \dots = \Delta_p = 0, \quad \Delta_j = \sum_{i=1}^p c^i \gamma_{ij} - c^j, \quad j = p+1, \dots, n$$

Случай 2. В симплекс-таблице есть строки соответствующие как вспомогательным переменным, так и основным, и среди коэффициентов строк $\Gamma(u^i)$, соответствующих не базисным основным переменным, есть положительные. Пусть, например, $\gamma_{sk} >$

0 , $s = 1, \dots, m - p$, $k = p + 1, \dots, n$. Это означает, что множество $I_k(z_*) = \{i : \gamma_{ik} > 0\}$ не пусто. Для элементов столбца $v = \gamma_{i0}$ выполнены равенства $g_{i0} = u^i = 0$, $i = 1, \dots, m - p$, а $\gamma_{m-p+i,0} = v^i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$. Поэтому $\min_{i \in I_k(z_*)} \gamma_{i0} / \gamma_{ik} = u_*^s / \gamma_{sk} = 0$. Поэтому любой такой элемент $g_{sk} > 0$ можно взять в качестве разрешающего элемента и, стало быть, заменить базисную переменную u^s на переменную x^k , а базис $B = (e_1, \dots, e_{m-p}, A_1, \dots, A_p)$ на базис $B_1 = (e_1, \dots, e_{s-1}, A_k, e_{s+1}, \dots, e_{m-p}, A_1, \dots, A_p)$. Если после этого на пересечении столбцов $x^{p+1}, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^n$ со строками, отвечающими вспомогательным переменным, еще остались положительные элементы, то можно повторить то же самое и вывести из базиса еще одну вспомогательную переменную. Если нам удастся убрать все вспомогательные переменные, то мы придем к случаю 1. Иначе может реализоваться следующий случай 3.

Случай 3. В симплекс-таблице есть строки соответствующие как вспомогательным переменным, так и основным, но среди коэффициентов строк $\Gamma(u^i)$, соответствующих не базисным основным переменным, нет положительных, то есть $\gamma_{ik} \leq 0$. Если в каком-то уравнении все коэффициенты равны нулю, то оно удовлетворено для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Пусть теперь в некотором уравнении все коэффициенты отрицательны, кроме тех, которые равны нулю:

$$\gamma_{ik_1} x^{k_1} + \dots + \gamma_{ik_q} x^{k_q} = 0.$$

Так как все коэффициенты отрицательны, а переменные — неотрицательны, равенство возможно только при $x^{k_1} = \dots = x^{k_q} = 0$. Таким образом, если $g_{ik} < 0$ на пересечении вспомогательной строки $\Gamma(u^i)$ и не базисной основной переменной x^k , то значение $x^k = 0$. Такие координаты назовем *отмеченными*, их множество обозначим через I_0 . Если вместо отмеченных переменных в первые $m - p$ уравнений подставить нули, то они будут тождественно выполнены для всех значений неотмеченных переменных, поэтому все эти уравнения можно просто выбросить (запомнив, что отмеченные переменные равны нулю). В результате, система превращается в систему вида

$$v_*^i = x^i + \sum_{j=p+1, j \notin I_0}^n \gamma_{m-p+i,j} x^j, \quad i = 1, \dots, p; \quad x^j = 0, \quad j \in I_0.$$

Поэтому в пространстве неотмеченных переменных $x_1 = \{x^i, i \notin I_0\}$ задачу можно переформулировать в виде

$$f_1(x_1) = \sum_{i \notin I_0} c^i x^i \rightarrow \inf, \quad x_1 \in X_1,$$

где

$$X_1 = \{x_1 \geq 0 : v_*^i = x^i + \sum_{k=p+1, k \notin I_0}^n \gamma_{m-p+i,k} x^k, i = 1, \dots, p\}.$$

Полученная задача — приведенная задача для угловой точки v_{1*} , и она может быть решена симплекс-методом. Решение исходной задачи может быть получено из решения этой добавлением нулей на места отмеченных переменных.

Случай 4. В симплекс-таблице отсутствуют строки, соответствующие основным переменным ($p = 0$). Угловая точка $z_* = (u_*, v_*)$, $u_* = 0$, с базисом $B = E_m$. Так как $u_* = B^{-1}b = b$, то $b = 0$. Последнее означает, что угловая точка $z = (0, 0)$ сама является решением вспомогательной задачи. Если при этом матрица $A \neq 0$, то можно найти $a_{ij} > 0$ (поменяв знак, если что) и, так как $b = 0$, выбрать этот a_{ij} в качестве разрешающего, и вывести u^i из базиса. И вернуться к одному из случаев 1–3.

Замечание 1.15. Вышеприведенная конструкция работает и для случая $(e_{i_1}, \dots, e_{i_{m-r}}, A_{j_1}, \dots, A_{j_p})$.

1.11 Примеры.

Рассмотрим задачу

$$f(x) = x^1 - x^4 - x^5 + x^6 \rightarrow \inf,$$

где

$$\begin{aligned} x = (x^1, \dots, x^7) \geq 0, \quad x^2 + 3x^4 - x^5 + 6x^6 + 2x^7 = 2, \\ x^1 + x^2 - x^3 - 3x^4 - x^5 + 3x^6 = 0, \quad -4x^1 + x^2 + x^3 + 6x^4 - 4x^5 + 6x^6 + x^7 = 1. \end{aligned}$$

Сначала найдем начальную угловую точку методом искусственного базиса. У нас три уравнения, поэтому будет три искусственных переменных. Имеем:

$$g(y) = u^1 + u^2 + u^3 \rightarrow \inf,$$

где

$$\begin{aligned} y = (u, x) = (u^1, u^2, u^3, x^1, \dots, x^7) \geq 0, \quad u^1 + x^2 + 3x^4 - x^5 + 6x^6 + 2x^7 = 2, \\ u^2 + x^1 + x^2 - x^3 - 3x^4 - x^5 + 3x^6 = 0, \quad u^3 - 4x^1 + x^2 + x^3 + 6x^4 - 4x^5 + 6x^6 + x^7 = 1. \end{aligned}$$

Начальная угловая точка $z_0 = (2, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Составим симплекс-таблицу.

	B	V	u^1	u^2	u^3	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
Γ_1	u^1	2	1	0	0	0	1	0	3	-1	6	2
Γ_2	u^2	0	0	1	0	1	1	-1	-3	-1	3	0
Γ_3	u^3	1	0	0	1	-4	1	1	6	-4	6	1
Δ		3	0	0	0	-3	3	0	6	-6	15	3

Применим антициклин к последнему столбцу. Для этого выпишем строки Γ_i/γ_{i7} для $\gamma_{i7} \neq 0$:

$$\frac{\Gamma_1}{\gamma_{17}} = (1, 1/2, 0, 0, 0, 1/2, 0, 3/2, -1/2, 3, 1), \quad \frac{\Gamma_3}{\gamma_{37}} = (1, 0, 0, 1, 1, -4, 1, 2, 6, -4, 6, 1).$$

Меньше, очевидно, третья строка. разрешающий элемент будет γ_{37} и выводим u^3 заменяя на x^7 . Имеем симплекс-таблицу угловой точки $z = (u_*, v_*)$, $u_* = (0, 0, 0)$, $v_* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \Gamma_1 & B & V & u^1 & u^2 & u^3 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 \\ \Gamma_2 & u^1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 8 & -1 & -2 & -9 & 7 & -6 & 0 \\ \Gamma_3 & u^2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 3 & 0 \\ \Gamma_3 & x^7 & 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 1 & 6 & -4 & 6 & 1 \\ \Delta & & 0 & 0 & 0 & -3 & 9 & 0 & -3 & -12 & 6 & -3 & 0 \end{array}$$

Так как $g(z_*) = 0$, что точка — решение вспомогательной задачи. Поэтому точка $v_* = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ — угловая точка исходного множества X . Найдем ее базис и приведенную систему. На пересечении строк вспомогательных переменных и небазисных переменных есть положительные величины. Это значит реализовался случай 2. Выберем разрешающий элемент из столбца для x^1 с помощью лексикографического порядка, это будет γ_{21} . Получим:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \Gamma_1 & B & V & u^1 & u^2 & u^3 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 \\ \Gamma_1 & u^1 & 0 & 1 & -8 & -2 & 0 & -9 & 6 & 15 & 15 & -30 & 0 \\ \Gamma_2 & x^1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & -1 & 3 & 0 \\ \Gamma_3 & x^7 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 & 5 & -3 & -6 & -8 & 18 & 1 \end{array}$$

Наконец, берем γ_{15} в качестве разрешающего и получаем

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \Gamma_1 & B & V & u^1 & u^2 & u^3 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 & x^6 & x^7 \\ \Gamma_1 & x^5 & 0 & 1/15 & -8/15 & -2/15 & 0 & -3/5 & 2/5 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ \Gamma_2 & x^1 & 0 & 1/15 & 7/15 & -2/15 & 1 & 2/5 & -3/5 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ \Gamma_3 & x^7 & 1 & 8/15 & -4/15 & -1/15 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{array}$$

угловая точка $v = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1)$ с базисом A_5, A_1, A_7 . Вычеркиваем столбцы вспомогательных переменных, переставляем вперед столбец базисных переменных x^5 , чтобы сделать таблицу Γ -положительной, пересчитываем строку Δ по формулам.

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} \Gamma_1 & B & V & x^5 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^6 & x^7 \\ \Gamma_1 & x^5 & 0 & 1 & 0 & -3/5 & 2/5 & 1 & -2 & 0 \\ \Gamma_2 & x^1 & 0 & 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -2 & 1 & 0 \\ \Gamma_3 & x^7 & 1 & 0 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2 & 2 & 1 \\ \Delta & & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

далее мы уже один раз считали. Берем γ_{22} , потом — γ_{33} . Получим $x_* = (0, 3, 2, 0, 1, 0, 0)$ с базисом A_5, A_2, A_3 .

Еще пример. Рассмотрим задачу

$$f(x) = x^1 - 3x^2 + 2x^3 + x^4 - 3x^5 \rightarrow \inf, \quad x \in X$$

где

$$x = (x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) \geq 0, \quad x^1 + x^2 - 4x^3 + x^4 - 3x^5 = 3, \\ x^1 - 4x^3 + 2x^4 - 5x^5 = 6, \quad -2x^1 - 5x^2 + 8x^3 + x^4 = 3$$

Нам надо добавить три вспомогательных переменных, выпишем симплекс-таблицу угловой точки $z_0 = (3, 6, 3, 0, 0, 0, 0)$

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} & B & V & u^1 & u^2 & u^3 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ \Gamma_1 & u^1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -4 & 1 & -3 \\ \Gamma_2 & u^2 & 6 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -4 & 2 & -5 \\ \Gamma_3 & u^3 & 3 & 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 8 & 1 & 0 \\ \Delta & & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & -8 \end{array}$$

Берем γ_{34} получаем

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} & B & V & u^1 & u^2 & u^3 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ \Gamma_1 & u^1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 6 & -12 & 0 & -3 \\ \Gamma_2 & u^2 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 10 & -20 & 0 & -5 \\ \Gamma_3 & x^4 & 3 & 0 & 0 & 1 & -2 & -5 & 8 & 1 & 0 \\ \Delta & & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & -8 \end{array}$$

Берем γ_{21} .

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c} & B & V & u^1 & u^2 & u^3 & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ \Gamma_1 & u^1 & 0 & 1 & -3/5 & 1/5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \Gamma_2 & x^1 & 0 & 0 & 1/5 & -2/5 & 1 & 2 & -4 & 0 & -1 \\ \Gamma_3 & x^4 & 3 & 0 & 2/5 & 1/5 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ \Delta & & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 & 4 & -8 \end{array}$$

Имеет место случай 3: в первой строке все коэффициенты основных переменных равны нулю. Поэтому можно вычеркнуть первую строку и все столбцы базисных переменных. Имеем:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c} & B & V & x^1 & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \\ \Gamma_1 & x^1 & 0 & 1 & 2 & -4 & 0 & -1 \\ \Gamma_2 & x^4 & 3 & 0 & -1 & 0 & 1 & -2 \\ \Delta & & 3 & 0 & 4 & -6 & 0 & 0 \end{array}$$

Получили симплекс таблицу угловой точки $v_0 = (0, 0, 0, 3, 0)$. Сделав один шаг для γ_{12} получаем симплекс таблицу с $\Delta_3 > 0$ и отрицательными элементами соответствующего столбца. Поэтому решения нет, функция неограничена.

Еще пример. Пусть

$$X = \{x = (x^1, x^2, x^3) : x^1 + x^2 = 1, x^1 + x^2 + x^3 = 1 \geq 0\}.$$

Вспомогательное множество

$$Y = \{(u, x) \geq 0 : u^1 + x^1 + x^2 = 1, u^2 + x^1 + x^2 + x^3 = 1\}.$$

Угловая точка $z_0 = (1, 1, 0, 0, 0)$, вспомогательная функция $g(u) = u^1 + u^2$.

$$\begin{array}{l} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Delta \end{array} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} B & V & u^1 & u^2 & x^1 & x^2 & x^3 \\ \hline u^1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ u^2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{array} \right.$$

Берем γ_{21} . Имеем:

$$\begin{array}{l} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \Delta \end{array} \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} B & V & u^1 & u^2 & x^1 & x^2 & x^3 \\ \hline u^1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ x^1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right.$$

Угловая точка $z_* = (u_*, v_*)$, $u_* = (0, 0)$, $v_* = (1, 0, 0)$, $g(z_*) = 0$. На пересечении строки $\Gamma(u^1)$ со столбцами небазисных основных переменных стоят неположительные элементы. Причем $\gamma_{13} = -1$, поэтому координата x^3 отмечена, откуда $x^3 = 0$. Выкидываем столбец x^3 и вспомогательные переменные. Получаем множество $\{(x^1, x^2) \geq 0 : x^1 + x^2 = 1\}$ с двумя угловыми точками $(1, 0)$, $(0, 1)$.

1.12 Условие разрешимости общей задачи

Напомним общую задачу: $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, $x = (x_1, x_2)$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$.

$$f(x) = \langle c_1, x_1 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in \{A_1 x \leq b_1, \quad A_2 x = b_2, \quad x_1 \geq 0\}. \quad (4)$$

Кроме того, если X не пусто, то $f_* = \inf_{x \in X} f(x)$, а если f_* конечно, то $X_* = \{x \in X : f(x) = f_*\}$. Задача 4 называется *разрешимой*, если X_* не пусто, и каждая точка $x_* \in X_*$ называется *решением*.

Теорема 6. *Задача (4) разрешима тогда и только тогда, когда X не пусто, и целевая функция $f(x)$ ограничена снизу на X , т.е. $f_* > -\infty$.*

Замечание 1.16. Для нелинейных задач это, разумеется, неверно. Например, $f(x) = 1/x$ на $X = [1, +\infty)$ ограничена на непустом X , точная нижняя грань равна 0 но она не достигается.

Замечание 1.17. Таким образом, если задача не разрешима, то или $X = \emptyset$, или X не пусто, но $f_* = -\infty$ (неограниченно убывает на X).

Доказательство. Необходимость очевидна (разрешимость по определению означает наличие $x_* \in X$, в которой $f(x_*) = f_* > -\infty$). Докажем достаточность. Пусть $X \neq \emptyset$, $f_* > -\infty$. Запишем задачу в канонической форме

$$g(w) = \langle c, w \rangle \rightarrow \inf, \quad w \in \{Aw = b, \quad w \geq 0\},$$

где $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $w = (x_1, z_1, z_2, y) \in \mathbb{R}^{2n_1+2n_2}$, $c = (c_1, c_2, -c_2, 0)$, $b = (b_1, b_2)$, $A_1 = (A_{11}, A_{12})$, $A_2 = (A_{21}, A_{22})$, и

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{12} & E_{n_1} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{22} & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь $x_2 = z_1 - z_2$. Так как X не пусто, то и W тоже не пусто, так как $z_1 = \max\{0, x_2\}$, $z_2 = \max\{0, -x_2\}$, $y = b_1 - A_{11}x_1 - A_{12}x_2$, и $g_* = \inf_{w \in W} g(w) = f_*$ — конечно. Применив теорему 4 к канонической задаче, заключаем, что W_* не пусто. Возьмем любую точку $w_* \in W_*$, $w_* = (x_{1*}, z_{1*}, z_{2*}, y_*)$. Тогда $x_* = (x_{1*}, x_{2*} = z_{1*} - z_{2*})$ — решение задачи (4), то есть X_* не пусто, что и требовалось. \square

Напомним, что множество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется *выпуклым*, если для любых двух его точек $u, v \in U$ отрезок $[u, v] \subset U$. В том числе, одноточечное множество выпукло. Множество $U \subset \mathbb{R}^n$ называется *замкнутым*, если содержит все свои предельные точки, т.е. для любой сходящейся последовательности $\{u_k\} \subset U$ ее предел также принадлежит U .

Теорема 7. *Если задача (4) разрешима, то множества X и X_* выпуклы и замкнуты.*

Доказательство. Каждая точка x отрезка $[u, v]$ может быть записана в виде $x = \alpha u + (1 - \alpha)v$, т.е. линейно выражается через u и v . Поэтому линейные уравнения и неравенства, выполненные в концах отрезка, выполнены во всех его точках. Например, если $Au \leq b$, $Av \leq b$, то $A(\alpha u + (1 - \alpha)v) = \alpha Au + (1 - \alpha)Av \leq \alpha b + (1 - \alpha)b = b$. Поэтому X выпукло. Точно так же, если $u, v \in X_*$, то $f(u) = f(v) = f_*$, откуда $f(\alpha u + (1 - \alpha)v) = \alpha f(u) + (1 - \alpha)f(v) = \alpha f_* + (1 - \alpha)f_* = f_*$, поэтому X_* выпукло.

Замкнутость X и X_* вытекает из непрерывности линейных функций. \square

Замечание 1.18. Аналоги теорем 6 и 7 могут быть переформулированы для задач на \sup .