

1 Линейное программирование

В данном разделе рассказывается о простейшей задаче на максимум или минимум — задаче линейного программирования. Здесь слово «программирование» понимается как оптимизация, т.е. речь идет об оптимизации (минимизации/максимизации) линейных функций. Очевидно, линейные функции на всем пространстве не имеют ни минимума, ни максимума. Но, если рассмотреть функцию на подмножестве, например на многограннике, то функция достигнет минимума/максимума на таком множестве. Причем достигают его в одной из вершин этого многогранника. Последнее позволяет свести задачу к перебору вершин многогранника. Перейдем к формальной постановке задачи и ее решению.

1.1 Постановка задачи и обозначения

Общая постановка задачи: найти минимум линейной функции $f(x) = \sum_{i=1}^n c_i x^i$ на подмножестве X пространства \mathbb{R}^n , заданного системой линейных уравнений и неравенств следующего вида:

$$\begin{aligned} x^i &\geq 0, & i &\in I; \\ \sum_{i=1}^n a_i^j x^i &\leq b^j & j &= 1, \dots, m \\ \sum_{i=1}^n a_i^j x^i &= b^j & j &= m+1, \dots, s. \end{aligned}$$

Тут f — целевая функция, X — допустимое множество, $x \in X$ — допустимая точка, $I \subset \{1, \dots, n\}$.

Краткая запись:

$$f(x) \rightarrow \inf, \quad x \in X.$$

Положим $f_* = \inf_{x \in X} f(x)$. Точка $x_* \in X$ — решение, если $f(x_*) = f_*$. Множество всех решений обозначим через X_* .

Задача называется разрешимой, если $X \neq \emptyset$, величина f_* конечна, и $X_* \neq \emptyset$.

Аналогичная задача

$$f \rightarrow \sup, \quad x \in X.$$

Она превращается в задачу на инфимум, если поменять знак. Будем использовать те же обозначения, но со звездочкой вверху.

1.2 Примеры

Приведем несколько практических примеров.

1.2.1 Планирование производства

Предприятие изготавливает n видов продукции из m видов сырья. Изготовление единицы продукции типа j требует a_j^i сырья с номером i и приносит c_j прибыли. Запасы i -го сырья составляют b^i единиц. Сколько производить продукции каждого типа j , чтобы максимизировать прибыль? Получаем задачу:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x^j \rightarrow \sup, \quad \sum_{j=1}^n a_j^i x^j \leq b^i, \quad i = 1, \dots, m, \quad x^j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Каждое решение x^* называется оптимальным планом производства.

1.2.2 Использование посевной площади

Под посев p видов культур отведено q участков, площади которых составляют b_j единиц. Урожайность i -ой культуры на j -ом участке равна a_{ij} единиц с единицы площади, а прибыль от ее выращивания равна c_i . Требуется распределить культуры по участкам так, чтобы вырастить не менее d_i единиц каждой культуры и максимизировать прибыль. Обозначим через x_{ij} предполагаемую площадь, занятую i -ой культурой на j -ом участке. Получаем следующую систему ограничений

$$\sum_{i=1}^p x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, q; \quad \sum_{j=1}^q a_{ij} x_{ij} \geq d_i, \quad i = 1, \dots, p; \quad x_{ij} \geq 0,$$

и целевую функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^p \left(c_i \sum_j a_{ij} x_{ij} \right) \rightarrow \sup.$$

1.2.3 Транспортная задача

Имеется r производителей и p потребителей, на i -ый производитель производит a_i единиц, а j -ый потребитель потребляет b_j единиц в день. Стоимость перевозки единицы от i к j равна c_{ij} , требуется минимизировать общую стоимость перевозок. Получаем следующую задачу:

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij} \rightarrow \inf \quad \sum_{i=1}^r x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, p; \quad \sum_{j=1}^p x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, r.$$

Каждое решение $x = (x_{11}, \dots, x_{rp})$ называется оптимальным планом перевозок.

1.3 Каноническая задача

Представим $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, $x = (x_1, x_2)$, $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$. Запишем нашу задачу в виде

$$f(x) = \langle c_1, x_1 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle \rightarrow \inf, \quad A_1 x \leq b_1, \quad A_2 x = b_2, \quad x_1 \geq 0. \quad (1)$$

Следующая задача называется *канонической*

$$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \inf, \quad Ax = b, \quad x \geq 0. \quad (2)$$

Оказывается любая задача линейного программирования сводится к канонической. Чтобы увидеть это, заведем несколько новых переменных так.

Чтобы компенсировать отсутствие условия $x_2 \geq 0$ заведем две группы переменных $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, каждая компонента которых получается из соответствующей компоненты переменной x_2 так: $z_1 = \max\{0, x_2\}$, $z_2 = \max\{0, -x_2\}$. Тогда $z_i \geq 0$ и $z_1 - z_2 = x_2$.

Чтобы превратить неравенства $A_1 x \leq b_1$ в равенства, заведем новые переменные $y \in \mathbb{R}^{n_1}$ и заменим неравенства равенствами $A_1 x + y = b_1$. Тогда исходные неравенства равносильны условию $y \geq 0$.

Представим матрицы A_1 и A_2 в блочном виде: $A_1 = (A_{11}, A_{12})$, $A_2 = (A_{21}, A_{22})$. Положим $w = (x_1, z_1, z_2, y) \in \mathbb{R}^{2n_1+2n_2}$, $c = (c_1, c_2, -c_2, 0)$, $b = (b_1, b_2)$ и

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{12} & E_{n_1} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{22} & 0 \end{pmatrix},$$

и рассмотрим задачу

$$g(w) = \langle c, w \rangle \rightarrow \inf, \quad Aw = b, \quad w \geq 0.$$

Из определений вытекает следующий результат.

Утверждение 1.1. *Задачи (1) и (3) эквивалентны в следующем смысле.*

- Множества X и W допустимых наборов значений переменных оба пусты или оба не пусты одновременно.
- Если они не пусты, то $f_* = g_*$, где $f_* = \inf\{f(x) : x \in X\}$ и $g_* = \inf\{g(w) : w \in W\}$ — минимальные значения.
- Множества решений X_* и W_* оба пусты или оба не пусты одновременно, причем, если $x_* = (x_1, x_2) \in X_*$, то $w_* = (x_1, z_1, z_2, y) \in W_*$, где $z_1 = \max\{0, x_2\}$, $z_2 = \max\{0, -x_2\}$, $y = b_1 - A_1 x$, и обратно, если $w_* = (x_1, z_1, z_2, y) \in W_*$, то $(x_1, x_2) \in X_*$, где $x_2 = z_1 - z_2$.

Также часто выделяют следующий частный случай, называемый *основной* или *стандартной*

$$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \inf, \quad Ax \leq b, \quad x \geq 0. \quad (3)$$

Заметим, что в этом случае для перехода к канонической задаче достаточно добавить только переменные y .

1.4 Геометрическая интерпретация — случай плоскости

Простейший пример — задача на плоскости $\mathbb{R}^2(x, y)$. Целевая функция $f(x, y) = c_1x + c_2y$. Допустимое множество $X \subset \mathbb{R}^2$ задано системой линейных неравенств вида $a_{1i}x + a_{2i}y \geq b_i$, $i = 1, \dots, m$. Каждое такое линейное неравенство задает полуплоскость, ограниченную прямой $a_{1i}x + a_{2i}y = b_i$. Поэтому множество $X \subset \mathbb{R}^2$ допустимых значений представляет собой пересечение полуплоскостей. Легко построить примеры, когда множество X пусто, ограничено или неограниченно, см. рис. ?? и ??.

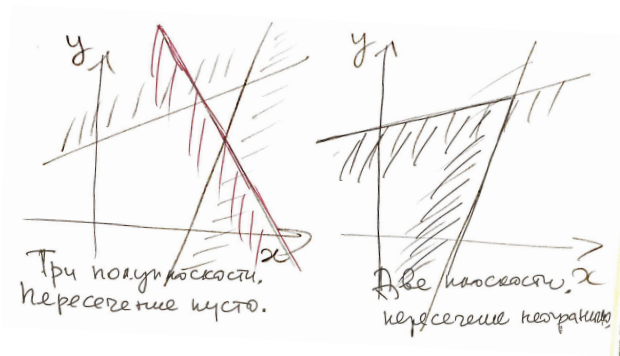


Рис. 1: Примеры пустого (слева) и неограниченного (справа) допустимого множества.

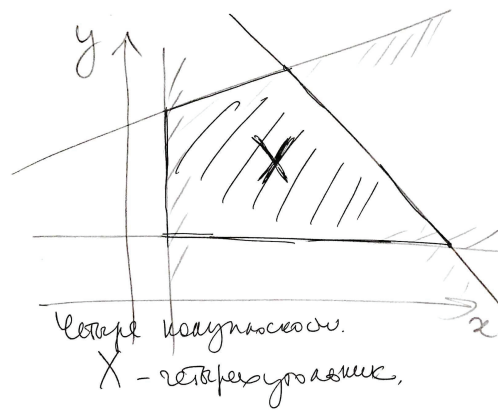


Рис. 2: Допустимое множество X — четырехугольник.

На следующем рисунке, рис. 3, показана линия уровня линейной функции $f(x, y)$ — прямая линия, стрелками указано направление роста. Поэтому максимальное значение функции f на допустимом множестве X достигается в вершине четырехугольника X , выделенной красным.

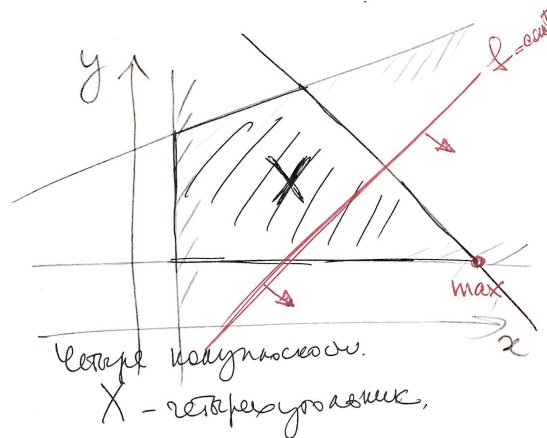


Рис. 3: Максимум функции f на допустимом четырехугольнике X .

1.5 Угловые точки, базис,

Точка $x \in X$ называется *угловой* (крайней, экстремальной) точкой множества X , если из представления $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$, где $x_1, x_2 \in X$ и $0 < \alpha < 1$ следует, что $x_1 = x_2 = x$.

Например, вершины многоугольника на плоскости или многогранника в пространстве — угловые точки. Точки сферы — угловые точки шара.

Изучим угловые точки допустимого множества $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geq 0, Ax = b\}$ канонической задачи. Обозначим через A_j столбец матрицы A с номером j .

Утверждение 1.2. В сделанных обозначениях, пусть $A \neq 0$, и r — ранг матрицы A . Точка $x = (x^1, \dots, x^n) \in X$ является угловой тогда и только тогда, когда существуют такие линейно независимые столбцы A_{j_1}, \dots, A_{j_r} матрицы A , что

$$A_{j_1}x^{j_1} + \dots + A_{j_r}x^{j_r} = b,$$

причем $x^{j_k} \geq 0$ и $x^j = 0$ при j отличных от j_k .

Доказательство. Необходимость. Пусть $x \in X$ — угловая точка. Если $x = 0$, то $b = 0$ и любые r линейно независимых столбцов матрицы удовлетворяют искомому соотношению. Пусть теперь $x \neq 0$, и пусть x^{j_1}, \dots, x^{j_p} — все положительные координаты

точки x . Тогда

$$A_{j_1}x^{j_1} + \dots + A_{j_p}x^{j_p} = b, \quad x^j = 0, \quad \text{при } j \neq j_k.$$

Покажем, что столбцы A_{j_k} линейно независимы. Пусть $A_{j_1}\gamma^{j_1} + \dots + A_{j_p}\gamma^{j_p} = 0$. Составим вектор $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, дополнив γ_{j_k} нулями. Тогда $A\gamma = 0$. Рассмотрим отрезок с концами $x_{\pm} = x \pm \varepsilon\gamma$. Очевидно, $Ax_{\pm} = b$. Кроме того, нулевые координаты остаются нулевыми, а $x^{j_k} \geq 0$ при достаточно малых ε . Поэтому $x_{\pm} \in X$. С другой стороны, $x = (x_+ + x_-)/2$, но x — угловая точка, поэтому $x_+ = x_- = x$, откуда $\gamma = 0$, что и доказывает линейную независимость столбцов A_{j_k} . В частности, $p \leq r$. Если $p < r$, то дополним построенную систему столбцов до базиса пространства столбцов, а недостающие значения x^j — нулями. Необходимость доказана.

Достаточность. Пусть некоторая точка x удовлетворяет условиям утверждения. Тогда $x \in X$. Предположим, что $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ для некоторых $x_1, x_2 \in X$ и $\alpha \in (0, 1)$. Покажем, что такое возможно только при $x_1 = x_2 = x$. Если $x^j = 0$, то так как $x_1^j \geq 0, x_2^j \geq 0, \alpha > 0, (1 - \alpha) > 0$, то такое возможно только при $x_1^j = x_2^j = x^j = 0$. Остается доказать то же самое для $x^j > 0$. По условию, все ненулевые компоненты x участвуют в представлении

$$A_{j_1}x^{j_1} + \dots + A_{j_r}x^{j_r} = b.$$

Так как $x_1, x_2 \in X$, то $Ax_1 = Ax_2 = b$, причем нулевым компонентам x соответствуют нулевые компоненты векторов x_1 и x_2 , откуда

$$A_{j_1}x_1^{j_1} + \dots + A_{j_r}x_1^{j_r} = b, \quad i = 1, 2.$$

Но тогда

$$A_{j_1}(x_1^{j_1} - x^{j_1}) + \dots + A_{j_r}(x_1^{j_r} - x^{j_r}) = 0, \quad i = 1, 2,$$

откуда $x_1^{j_1} = x^{j_1} = x_2^{j_1}$ в силу линейной независимости столбцов. Утверждение доказано. \square

Терминология: если x — угловая точка, и $A_{j_1}x^{j_1} + \dots + A_{j_r}x^{j_r} = b$, то система векторов $(A_{j_1}, \dots, A_{j_r})$ называется *базисом угловой точки x* , а соответствующие переменные — базисными переменными, а остальные — небазисными или свободными. Если все базисные координаты положительны, то угловая точка называется *невыврожденной*. Иначе — вырожденной. Множество X называется *невыврожденным*, если все его угловые точки невырождены. Иначе — вырожденным.

Утверждение 1.2 позволяет найти все угловые точки, решив C_n^r систем уравнений.

Следствие 1.3. *Невырожденная угловая точка имеет единственный базис.*

Пример. Рассмотрим

$$X = \{x = (x^1, x^2, x^3) \geq 0 : x^1 + x^2 - x^3 = 0, x^1 + x^2 + x^3 = 2\},$$

оно имеет две невырожденные угловые точки. И само множество X тоже невырожденное.

Пример. Рассмотрим

$$X = \{x = (x^1, x^2, x^3, x^4) \geq 0 : x^1 + x^2 + 3x^3 + x^4 = 3, x^1 - x^2 + x^3 + 2x^4 = 1\},$$

невырожденные угловые точки с базисами A_1, A_2 и A_2, A_4 и одна вырожденная с базисами A_1, A_3, A_2, A_3 или A_3, A_4 . Множество X вырожденное.