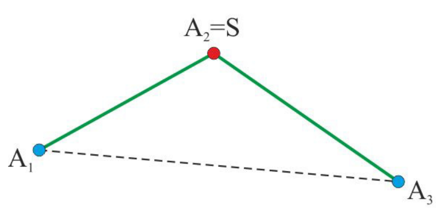
1 Кратчайшие и локально кратчайшие деревья

1.1 Пример: задача Ферма

Евклидово минимальное остовное дерево для данного конечного подмножества M точек плоскости можно рассматривать как модель оптимальной транспортной сети, соединяющей точки из M. Однако уже в 17 веке математики, в том числе Пьер Ферма, поняли, что длину такой сети можно уменьшить, если разрешить добавлять вершины–развилки, не входящие во множество M. Классический пример получается при решении известной *задачи Ферма–Штейнера*, которая формулируется так. Пусть $M = \{A_1, \ldots, A_k\}$ — конечное множество точек плоскости. Требуется найти такие точки S, на которых принимает минимальное значение функция $f(X) = \sum_{i=1}^{k} |A_i X|$. Эти точки называются *точками Ферма* или *точками Ферма–Штейнера*. Ферма поставил эту задачу своим ученикам для случая $k = 3$. Ее решение для треугольника связано с именами Торричелли, Кавальери и Симпсона и устроено следующим образом.

Утверждение 1.1. *Если все углы треугольника $A_1A_2A_3$ не превосходят $120°$, то единственное решение задачи Ферма–Штейнера — это точка Торричелли, т.е. точка S, из которой все стороны треугольника видны под одинаковыми, и значит равными $120°$ углами. В этом случае кратчайшая сеть, соединяющая точки A_1, A_2, A_3, состоит из трех отрезков $[A_i, S]$.*

Если один из углов треугольника $A_1A_2A_3$ больше или равен $120°$, то единственное решение задачи Ферма–Штейнера совпадает с вершиной этого угла. В этом случае кратчайшая сеть, соединяющая точки A_1, A_2, A_3 представляет собой объединение двух сторон треугольника, примыкающих к его большему углу.



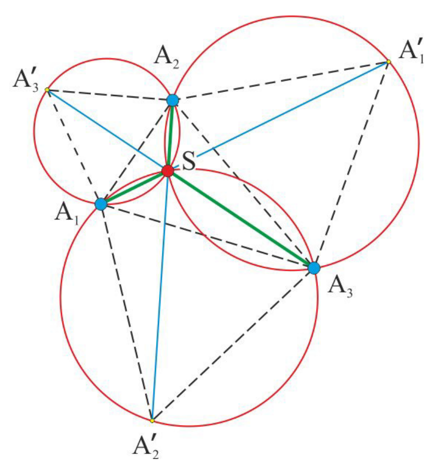


Рис. 1: Решение задачи Ферма для треугольника.

Пусть все углы треугольника $A_1A_2A_3$ не превосходят $120°$. Построим на каждой стороне A_iA_j треугольника $A_1A_2A_3$ правильный треугольник $A_iA_jA'_k$, пересекающийся с $A_1A_2A_3$ только по стороне A_iA_j. Точка Торричелли S может быть построена или как точка пересечения окружностей, описанных вокруг правильных треугольников $A_iA_jA'_k$, или как точка пересечения отрезков $[A_i, B_i]$. Сами эти отрезки называются *линиями Симпсона* (не путать с прямыми Симпсона). Кроме того, длины линий Симпсона, т.е. отрезков $[A_iA'_i]$ равны между собой и равны длине кратчайшей сети, т.е. равны $|A_1S| + |A_2S| + |A_3S|$.

Доказательство этих утверждений можно получить «школьными» геометрическими методами, а можно извлечь из соображений математического анализа.

1.2 Формула вариация длины отрезка

Пусть AB — произвольный невырожденный (т.е. $A \neq B$) отрезок в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$. Рассмотрим его однопараметрическую линейную деформацию $A(t)B(t)$, где $A(t) = A + u\,t$ и $B(t) = B + v\,t$, и функцию длины $\ell(t) = \|A(t)B(t)\|$. Обозначим через $x = B - A$ и $w = v - u$ соответствующие векторы, тогда $\ell(t) = \sqrt{\langle x + w\,t, x + w\,t\rangle}$, где $\langle a, b\rangle$ — скалярное произведение. Следующее утверждение получается прямым подсчетом.

Утверждение 1.2. *Если величина $\ell(t)$ отлична от нуля, то функция ℓ дифференцируема в точке t бесконечное число раз, и ее производные в сделанных обозначениях имеют вид*

$$\ell'(t) = \frac{\langle w, x + w\,t\rangle}{\|x + w\,t\|}, \qquad \ell''(t) = \frac{\langle w, w\rangle\langle x + w\,t, x + w\,t\rangle - \langle w, x + w\,t\rangle^2}{\|x + w\,t\|^3}.$$

В частности,

$$\ell'(0) = \langle w, \tau\rangle, \qquad \ell''(0) = \frac{\langle w, w\rangle\langle x, x\rangle - \langle w, x\rangle^2}{\|x\|^3} = \frac{\langle w, \nu\rangle^2}{\|x\|},$$

где $\tau = (B - A)/\|AB\|$ — единичный вектор направления отрезка, а ν — любой единичный вектор нормали к отрезку. В частности, вторая производная всегда неотрицательна.

Точка S — решение проблемы Ферма, если и только если для каждого вектора w сумма производных длин отрезков $|A_iS(t)|$ неотрицательна.

Следствие 1.3. *Если S — решение проблемы Ферма для $M = \{A_1, \dots, A_k\}$ и $S \neq A_i$, то сумма единичных векторов направлений ребер–отрезков SA_i равна нулю, т.е.,*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{\overrightarrow{SA_i}}{|SA_i|} = 0.$$

Следствие 1.4. *При $k = 3$, если S — решение проблемы Ферма и $S \neq A_i$, то углы между векторами SA_i равны $120°$.*

Для случая $A = B$ существует только односторонняя производная функции $\ell(t)$ в $t = 0+$, и она равна $|w|$.

Следствие 1.5. *При $k = 3$, если S — решение проблемы Ферма и $S = A_i$ для некоторого i, то угол между векторами SA_j и SA_k больше или равен $120°$.*

1.3 Кратчайшие деревья. Проблема Штейнера.

Естественное обобщение проблемы Ферма — *проблема Штейнера* о кратчайших деревьях. Общая идея состоит в том, что для уменьшения длины сети, соединяющей данное множество M, можно добавить не одну, как в задаче Ферма, а несколько дополнительных вершин. Приведем теперь общую формулировку задачи.

Пусть M — конечное подмножество метрического пространства X. Про связный граф, Рассмотрим конечное подмножество V, содержащее M, и построим для него метрическое минимальное остовное дерево. Получим некоторое дерево, соединяющее множество M. Обозначим через $\mathrm{mst}(V)$ длину этого дерева. Положим

$$\mathrm{smt}(M) = \inf\big\{\mathrm{mst}(V) : V \subset X,\, M \subset V\big\},$$

где точная нижняя грань берется по всем конечным подмножествам метрического пространства X, содержащим множество M. Если этот инфимум достигается на некотором множестве V, то каждое метрическое минимальное остовное дерево на V называется *кратчайшим деревом на M в X*. Задача поиска кратчайшего дерева на конечном подмножестве M метрического пространства называется *обобщенной проблемой Штейнера*. Множество M в этом контексте называется *граничным*, его вершины — *граничными вершинами*, остальные вершины — *подвижными* или *внутренними*. Классическая проблема Штейнера — это обобщенная проблема Штейнера для евклидова пространства $X = \mathbb{R}^d$.

Замечание 1.6. Кратчайшее дерево для конечного подмножества M метрического пространства X — это связный граф, множество вершин которого содержится в X, содержит M, и который имеет наименьшую возможную длину. Здесь под *длиной графа* с вершинами в метрическом пространстве понимается сумма длин его ребер, а *длина ребра $e = xy$* — это расстояние в метрическом пространстве X между вершинами x и y, которые соединяет ребро.

Замечание 1.7. Очевидно, что если множество M состоит из двух точек, то добавление дополнительных вершин не может уменьшить длину соединяющего M дерева, поэтому в этом случае кратчайшее дерево — это дерево с двумя вершинами и одним ребром. Несложно проверить, что для множества M, состоящего из трех точек, добавлять больше одной вершины нет смысла, поэтому в этом случае проблема Штейнера эквивалентна задаче Ферма.

Теорема 1. *Для любого не пустого конечного подмножества M евклидова пространства $\mathbb{R}^d$ существует кратчайшее дерево.*

Замечание 1.8. Несложно построить пример метрического пространства X и его конечного подмножества M, для которого кратчайшего дерева не существует (сделайте это). При этом величина $\mathrm{smt}(M)$ всегда определена (фактически, это точная нижняя грань непустого ограниченного снизу подмножества вещественной прямой).

1.4 Локальная структура кратчайшего дерева в евклидовом пространстве.

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф, множество вершин которого лежит в $\mathbb{R}^d$. Каждому ребру $e = \{v_i, v_j\}$ графа G поставим в соответствие отрезок $[v_i, v_j] \subset \mathbb{R}^d$. Положим $\Gamma = \bigcup_{\{v_i,v_j\}\in E}[v_i, v_j]$. Полученное подмножество пространства $\mathbb{R}^d$ называется *геометрической реализацией графа G*. В дальнейшем для Γ будем использовать терминологию теории графов, называя, множество Γ также (*геометрическим*) *графом*, точки $v_i \in \Gamma$ — его вершинами, отрезки $[v_i, v_j]$ — его ребрами, и т.д.

Напомним, что *звездой вершины v* графа G называется подграф в G, порожденный v и всеми соседними вершинами.

Пусть G — кратчайшее дерево для $M \subset \mathbb{R}^d$, и v — произвольная его вершина. Обозначим через $w_1, \dots, w_k$ соседние с v вершины. Тогда, очевидно, звезда вершины v должна быть кратчайшим деревом в $\mathbb{R}^d$ для граничного множества $\{w_1, \dots, w_k\}$. Более того, любые два ребра-отрезка $[v, w_i]$ и $[v, w_j]$ геометрической реализации должны образовывать кратчайшее дерево для трех точек $\{w_i, w_j, v\}$ (если это не так, то дерево можно укоротить, заменив пару отрезков $[v, w_i]$ и $[v, w_j]$ на кратчайшее дерева для треугольника $w_i w_j v$). Заметим, что любые три точки в $\mathbb{R}^d$ лежат в одной двумерной плоскости, поэтому можно воспользоваться уже известным нам решением задачи Ферма для трех точек на плоскости, из которого следует, что угол в вершине v между отрезками $[v, w_i]$ и $[v, w_j]$ не может быть меньше 120°. Также легко проверить, что любые два отрезка-ребра геометрической реализации кратчайшего дерева могут пересекаться только в общей вершине (иначе фрагменты этих ребер образуют пару сторон треугольника, угол между которыми меньше 120° и мы снова получаем возможность укоротить кратчайшее дерево).

В результате получается следующая несложная теорема о локальной структуре кратчайшего дерева в $\mathbb{R}^d$.

Теорема 2. *Пусть Γ — геометрическая реализация произвольного кратчайшего дерева для не пустого конечного подмножества M евклидова пространства $\mathbb{R}^d$. Тогда*

- *Ребра-отрезки дерева Γ могут пересекаться только по общим вершинам.*
- *Все вершины степени 1 дерева Γ принадлежат множеству M.*

- *Смежные ребра дерева* Γ *образуют в общей вершине угол величины не меньше чем* 120°.

- *Если вершина степени* 2 *дерева* Γ *не принадлежит* M, *то угол в ней между инцидентными ей ребрами равен* 180°.

Следствие 1.9. *Степень вершины кратчайшего дерева не превосходит трех. Если степень вершины равна трем, то углы между ребрами, стыкующимися в этой вершине, равны между собой и равны* 120°. *Если степень граничной вершины* $x \in M$ *равна двум, то угол в ней больше или равен* 120°.

Замечание 1.10. Пусть Γ — геометрическая реализация кратчайшего дерева, x — ее подвижная вершина степени 2, и $[v,x]$ и $[w,x]$ — соответствующие ребра-отрезки. Тогда эти отрезки лежат на одной прямой, и их объединение представляет собой отрезок $[v,w]$, для которого x является внутренней точкой. Если в Γ заменить пару отрезков $[v,x]$ и $[w,x]$ на один отрезок $[v,w]$, то Γ как подмножество пространства не изменится, а в соответствующем графе произойдет естественная перестройка: будут удалена вершина x и пара инцидентных ей ребер $\{v,x\}$ и $\{w,x\}$ и добавлено одно ребро $\{v,w\}$. Длина перестроенного дерева не изменится, поэтому оно тоже будет кратчайшим, но в нем будет на одну подвижную вершину степени 2 меньше. Таким способом можно избавится от всех подвижных вершин степени 2. В дальнейшем, если противное не оговорено, будем не ограничивая общности предполагать, что кратчайшие деревья не имеют подвижных вершин степени 2. Другими словами, *все вершины степени* 1 *и* 2 *принадлежат граничному множеству.*

1.5 Локально-минимальные сети в евклидовом пространстве.

Пусть M — конечное подмножество в $\mathbb{R}^d$. Связный геометрический граф Γ, множество вершин которого содержит M, будем называть *локально-минимальной сетью с границей* M, если

- его ребра-отрезки пересекаются только по общим вершинам,

- углы между смежными ребрами не меньше 120°,

- все вершины степени 1 и 2 являются граничными, т.е. принадлежат множеству M.

Следствие 1.11. *Степень вершины локально-минимальной сети не превосходит трех. Если степень вершины равна трем, то углы между ребрами, стыкующимися в этой вершине, равны между собой и равны* 120°. *Если степень граничной вершины* $x \in M$ *равна двум, то угол в ней больше или равен* 120°.

Замечание 1.12. Локально-минимальная сеть является локально кратчайшей в следующем смысле: звезда каждой вершины x такой сети является кратчайшей сетью для граничного множества, состоящего из всех смежных с x вершин сети и самой x, если последняя была граничной в исходной сети.

Замечание 1.13. Каждое кратчайшее дерево (без подвижных вершин степени два, как мы и договаривались выше) является локально-минимальной сетью. Обратное не верно. Скажем, множество вершин прямоугольника с неравными сторонами модно соединить двумя локально-минимальными деревьями, из которых только одно будет кратчайшим, см. рис. 2.

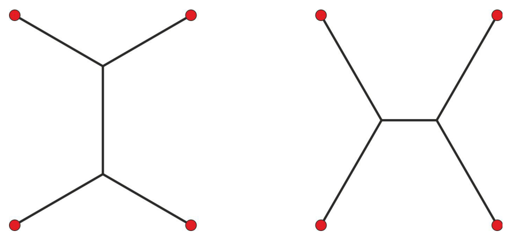


Рис. 2: Две локально-минимальных сети для множества вершин прямоугольника. У них разные длины, поэтому кратчайшая их них только одна.

Замечание 1.14. Локально-минимальная сеть, в отличие от кратчайшей, не обязана быть деревом. На рис. 3 показана локально-минимальная сеть с шестиугольными циклами. Постройте пример локально-минимальной сети с одним восьмиугольным циклом. Сколько может быть вершин в цикле локально-минимальной сети?

Рис. 3: Локально-минимальная сеть с 6-угольными циклами.

1.6 Невырожденные компоненты локально-минимального дерева.

Напомним операцию *разрезания графа по вершине*. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф, v — произвольная его вершинам степени $k \geq 2$, и $\{w_1, \ldots, w_k\}$ — вершины, смежные с v. Выбросим из графа G вершину v, добавим k штук новых вершин $\{v_1, \ldots, v_k\}$, и заменим ребра $\{v, w_i\}$ на ребра $\{v_i, w_i\}$.

Пример 1. Пусть G — дерево, и v — произвольная его вершинам степени $k \geq 2$. После разрезания дерева G по вершине v получим граф, являющийся объединением k деревьев, у каждого из которых соответствующая вершина v_i имеет степень 1.

Пусть Γ — локально-минимальное дерево с границей M. Разрежем его по всем граничным вершинам степени 2 и 3. Получающиеся в результате этой операции новые вершины степени 1 отнесем к граничным вершинам полученных деревьев. В результате дерево Γ распадется в объединение деревьев G_i, у каждого из которых множество граничных вершин в точности совпадает с множеством всех его вершин степени 1. Деревья G_i называются *невырожденными компонентами* дерева Γ. Каждая невырожденная компонента представляет собой дерево, степени вершин которого равны 1 или 3, причем все вершины степени 1 — граничные, а все вершины степени 3 — внутренние. Такие деревья будем называть 2-*деревьями* или *бинарными деревьями.*

Замечание 1.15. Бинарными деревьями в литературе обычно называют похожий, но другой объект, а именно, ориентированные корневые деревья с корневой вершиной степени два такие, что из каждой вершины выходит не более двух ребер.

Если локально-минимальное дерево имеет всего одну невырожденную компоненту, то оно называется *невырожденным.* Ясно, что невырожденное локально-минимальное дерево является бинарным деревом.

Напомним, что такое граф пересечений семейства подмножеств. Пусть A — произвольное не пустое множество и $\mathcal{A} = \{A_i\}$ произвольное семейство его попарно различных не пустых подмножеств. Граф пересечений семейства $\mathcal{A}$ — это граф $G_{\mathcal{A}}$, множество вершин которого равно $\mathcal{A}$ и две его вершины A_i и A_j соединены ребром, если и толко если $A_i \cap A_j$ не пусто.

Утверждение 1.16. *Каждое локально минимальное дерево Γ с границей M в $\mathbb{R}^d$ может быть представлено в виде объединения своих невырожденных компонент Γ_i, каждая из которых является локально минимальным деревом с границей $M_i \subset M$. Две различных невырожденных компоненты Γ_i и Γ_j (соотвественно, подмножества M_i и M_j) могут пересекаться не более чем по общей граничной вершине, причем угол между их ребрами в этой вершине больше или равен $120°$. Графы пересечений семейств $\{\Gamma_i\}$ и $\{M_i\}$ изоморфны и представляют собой деревья, степени вершин которых не превосходят трех.*

1.7 Конечный алгоритм построения кратчайшего дерева.

Пусть G — бинарное дерево с n вершинами степени 1. Тогда легко сосчитать количество k его внутренних вершин, т.е. вершин степени 3. А именно, достаточно воспользоваться леммой о сумме степеней вершин:

$$\sum_v \deg v = n + 3k = 2|E| = 2(n + k - 1),$$

откуда $k = n - 2$, и $|V| = 2n - 2$, а $|E| = 2n - 3$. Поэтому количество разных бинарных деревьев с фиксированным количеством вершин степени 1 конечно (не превосходит $|V|^{|V|-2}$).

Из этого замечания и утверждения 1.16 вытекает следующий конечный алгоритм построения кратчайшего дерева для заданного конечного множества точек $M \subset \mathbb{R}^d$.

Перебираем всевозможные представления множества $M = \cup M_i$, где M_i — не пустые попарно различные подмножества множества M такие что, граф пересечений семейства $\{M_i\}$ представляет собой дерево степени вершин которого не превосходят трех.

Для каждого такого представления $M = \bigcup_{i=1}^k M_i$ делаем следующее. Для каждого M_i перебираем всевозможные бинарные деревья G_{ij} с границей M_i. Для каждого набора G_{ij} проверяем, существует ли изоморфное G_{ij} локально-минимальное бинарное дерево Γ_{ij} с границей M_i. Если выбранные деревья Γ_{ij} существуют для всех i, проверяем образует ли их объединение локально минимальное бинарное дерево (т.е. проверяем условия стыковки невырожденных компонент). Если да, то считаем суммарную длину и переходим к следующему варианту. В результате будут построены всевозможные локально-минимальные деревья с границей M и вычислены их длины. Среди них выберем кратчайшее.

Замечание 1.17. Этот алгоритм, разумеется, не эффективный. Он натыкается по меньшей мере на два «комбинаторных взрыва». Первый возникает при переборе представлений граничного множества M в виде $M = \bigcup M_i$. Второй возникает при переборе всевозможных бинарных деревьев с фиксированной границей M_i.

Если бинарное дерево G, соединяющее граничное множество $M = \{A_i\}_{i=1}^n$ фиксировано, то известно какие добавленные и граничные вершины соединены между собой. Поэтому можно подойти к задаче проверки существования локально-минимального дерева типа G с границей M следующим образом. Обозначим через $S_1, \ldots, S_{n-2}$ подвижные вершины дерева G и будем рассматривать их как точки в $\mathbb{R}^d$. Если положение этих точек фиксировано, то можно построить геометрическую реализацию $\Gamma(S_1, \ldots, S_{n-2})$ дерева G с вершинами в точках S_i и M_j и вычислить ее длину как функцию от $S_1, \ldots, S_{2n-2}$. Полученная функция непрерывно зависит от $(2n-2)d$ координат подвижных вершин и дифференцируема по направлению в каждой точке. Более того, она положительна и представляет собой сумму выпуклых вниз функций — функций расстояния, поэтому она сама выпукла вниз, и значит множество ее минимумов не пусто и выпукло. Для поиска минимума в общем случае можно применить подходящую модификацию градиентного спуска. После того как приближенный минимум будет найден, нужно проверить полученную сеть на локальную минимальность (т.е. проверить выполнение условия теоремы 2). Если они выполнены, то локально-минимальная сеть изоморфная G и уже построена. Если нет, то сети не существует. Отметим, что в общем случае точные алгоритмы построения локально-минимальных сетей не известны.

Но оказывается в случае евклидовой плоскости существует точный алгоритм проверки существования и построения локально-минимальных бинарных деревьев с помощью циркуля и линейки. Он был открыт канадским математиком Z. Melzak'ом в 1961 году и представляет собой обобщение изложенной выше конструкции Ферма, Торричелли, Кавальери.

1.8 Алгоритм Мелзака построения локально-минимального бинарного дерева.

Итак, пусть дано бинарное дерево G с границей $M = \{A_i\}_{i=1}^n$. Требуется или построить изоморфное G локально-минимальное дерево Γ (здесь рассматриваются только изоморфизмы, постоянные на M), или выяснить, что такого дерева не существует. Для краткости мы будем говорить о поиске локально-минимального дерева *типа G с границей M*.

Алгоритм Мелзака состоит из двух этапов, так называемого *прямого* и *обратного хода.* Прямой ход состоит из $n-2$ шагов, на каждом из которых задача редуцируется к аналогичной задаче, но с на единицу меньшим числом граничных точек. Таким образом, на последнем шаге прямого хода требуется построить локально минимальное дерево для граничного множества из двух точек. Это, очевидно, отрезок прямой.

Обратный ход алгоритма состоит в последовательном восстановлении искомого бинарного дерева. Это восстановление возможно при выполнении определенных условий, если на каком-то шаге условия не выполнены, то восстановление невозможно и искомой сети не существует.

Перейдем к описанию деталей. Для этого нам понадобится понятие усов. Пусть G — бинарное дерево с границей M. Пара смежных ребер дерева G называется *усами*, если они имеют общую (внутреннюю) вершину степени три, и каждое из них инциденто (граничной) вершине степени один. Сами эти две граничные вершины степени один тоже называются *усами.*

Следующее утверждение легко доказывается по индукции.

Лемма 1.18. *Любое бинарное дерево с четырьмя и более вершинами содержит две пары непересекающихся усов.*

1.8.1 Алгоритма Мелзака для двух и трех граничных точек

Если множество M состоит их двух точек, и G — единственное бинарное дерево с двумя вершинами степени один, то G — дерево из одного ребра, и соответствующее локально-минимальное дерево — прямолинейный отрезок.

Если множество M состоит из трех точек, $M = \{A_1, A_2, A_3\}$, и G — единственное бинарное дерево с тремя вершинами степени один, то G — звезда с одной вершиной степени три. Оно имеет три пары попарно пересекающихся усов (любые два его ребра образуют усы). Повторим описанную выше конструкцию Ферма–Торричелли. Выберем любые усы и построим на соответствующих вершинах-усах A_i, A_j, правильный треугольник $A_iA_jA'_k$ так, чтобы его третья вершина A'_k и третья точка A_k множества M лежали в разных полуплоскостях по отношению к прямой A_iA_j. Рассмотрим новое граничное множество M', полученное из M заменой пары вершин-усов A_i, A_j на вершину A'_k построенного правильного треугольника, и новое бинарное дерево G', полученное из дерева G выбрасыванием ребер-усов A_ix и A_jx и превращением вершины x в граничную вершину A'_k итогового дерева G'. Таким образом, дерево G' состоит из единственного ребра, соответствующее локально минимальное дерево Γ' с границей $M' = \{A_k, A'_k\}$ представляет собой прямолинейный отрезок $[A_k, A'_k]$. На этом заканчивается *прямой ход* алгоритма Мелзака в этом случае. Перейдем к обратному ходу — восстановлению исходного дерева. Для этого опишем окружность вокруг треугольника $A_iA_jA'_k$. Если эта окружность пересекается с отрезком $[A_k, A'_k]$ по двум точкам S и A'_k, и точка S лежит на меньшей из двух дуг A_iA_j, то перестраиваем локально минимальную сеть Γ', заменив отрезок $[A'_k, S]$ на два отрезка $[S, A_i]$ и $[S, A_j]$. В результате получается искомая локально-минимальная сеть Γ с границей M. Если же это условие не выполнено (т.е. или отрезок $[A_k, A'_k]$ пересекает окружность по одной точке A'_k, или вторая точка пересечения лежит на большей дуге A_iA_j), то локально-минимального дерева типа G на M не существует (в этом случае один из углов треугольника $A_1A_2A_3$ больше $120°$ и кратчайшая сеть состоит из двух невырожденных компонент-отрезков).

1.8.2 Алгоритма Мелзака, общий случай, прямой ход

Итак, пусть $M = \{A_1, \ldots, A_n\}$ — конечное подмножество плоскости, $n \geq 4$, и G — бинарное дерево с границей M. Выберем у G произвольные усы, обозначим их ребра через $\{A_i, x\}$ и $\{A_j, x\}$. Построим правильный треугольник A_iA_jA' (одним из двух возможных способов). Перестроим граничное множество M во множество M' состоящее из $(n-1)$ точки, заменив пару вершин A_i, A_j на точку A', и дерево G в дерево G', выбросив из G ребра $\{A_i, x\}$ и $\{A_j, x\}$ и заменив вершину x на точку A'. Переход от дерева G с границей M к дереву G' с границей M' называется шагом прямого хода алгоритма Мелзака. Повторим эту операцию $n-2$ раза, каждый раз выбирая усы и перестраивая граничное множество и дерево. В результате получим дерево, состоящее из одного ребра, с границей, состоящей из двух точек. Построим локально минимальное дерево, соединяющее полученные две точки, т.е. прямолинейный отрезок. Если обратный ход алгоритма завершится построением локально-минимальной сети Γ, то этот прямолинейный отрезок будет называться *линией Симпсона* сети Γ.

Замечание 1.19. Так как правильный треугольник A_iA_jA' определен неоднозначно (его можно построить двумя способами), то для данного множества M и бинарного дерева G имеется 2^{n-2} варианта выполнения прямого хода алгоритма Мелзака. Вообще говоря, нужно будет проверять их все.

1.8.3 Алгоритма Мелзака, общий случай, обратный ход

Итак, мы построили прямолинейный отрезок Γ', по крайней мере один из концов которого был построен прямым ходом алгоритма как вершина правильного треугольника. Перестроим этот отрезок в искомое локально минимальное дерево или убедимся, что такого дерева не существует.

На каждом шаге обратного хода мы будем, если возможно, перестраивать текущее дерево Γ' и его границу M' так. Заменим одну из граничных вершин $x \in M'$, которая была построена на прямом ходе как вершина некоторого правильного треугольника xyz, на две других вершины y и z этого треугольника (т.е. $M' := M' \setminus \{x\} \cup \{y, z\}$). Опишем окружность O вокруг треугольника xyz. Пусть ребро e дерева Γ', инцидентное x, пересекает эту окружность по двум точкам x и s. Если s лежит на меньшей дуге yz окружности O, то заменим ребро e на три отрезка $[s, y]$, $[s, z]$ и $e \setminus (s, x]$. Легко видеть, что эти три отрезка встречаются в точке s под равными углами. Таким образом, мы перестроили M' и Γ', и если у перестроенной сети остались граничные вершины, построенные на прямом ходе алгоритма как вершины правильного треугольника (т.е., граничное множество еще не совпадает с M), то алгоритм переходим у следующем шагу обратного хода. Если же точка s лежит на большей дуге yz окружности O или ребро e пересекает окружность только по точке x, то алгоритм возвращает ответ, что искомой сети не существует.

Утверждение 1.20. *Пусть G — бинарное дерево с границей $M \subset \mathbb{R}^2$. Изоморфное G локально-минимальное дерево Γ с границей M существует, если и только если для одной из реализаций прямого хода алгоритма Мелзака (т.е.для одного из 2^{n-2} возможных выборов правильных треугольников) обратный ход алгоритма Мелзака доходит до конца и восстанавливает искомое дерево Γ. Длина Γ равна длине соответствующей линии Симпсона.*

Таким образом, алгоритм Мелзака за позволяет, вообще говоря, за экспоненциальное число шагов или построить локально-минимальное бинарное дерево данного типа с данной границей, или убедиться в том, что такого не существует.

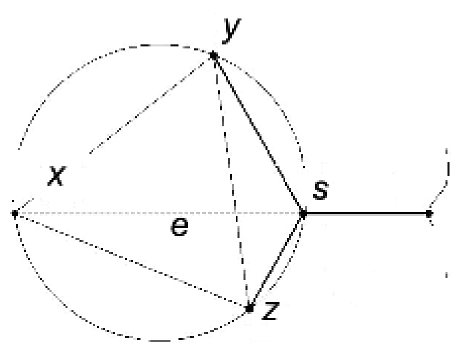


Рис. 4: Обратный ход алгоритма Мелзака.