1.5 Симплекс–метод: общая схема

Ниже мы докажем, что всякое не пустое допустимое множество имеет угловую точку, и что если задача линейного программирования имеет решение, то среди решений есть хотя бы одна угловая точка. Отсюда имеем конечный алгоритм решения: перебор всех угловых точек (к сожалению, их может быть очень много). Симплекс–метод — это метод «умного перебора», последовательного улучшения плана. Другими словами, нужно так переходить от одной угловой точки к другой, чтобы целевая функция последовательно убывала.

Будем рассматривать каноническую задачу и предполагать, что из системы ограничений исключены линейно зависимые уравнения, то есть число уравнений равно рангу r матрицы A. Так как случай $r = n$, где n — число переменных, тривиален (докажите, что в этом случае X или пусто, или состоит из одной единственной точки), то будем предполагать, что $r < n$.

Пусть $v = (v^1, \dots, v^n)$ — некоторая угловая точка с базисом $A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$. Квадратную невырожденную матрицу $B = (A_{j_1}, \dots, A_{j_r})$ будем называть *базисом* или *базисной матрицей*, номера $I(v) = \{j_1, \dots, j_r\}$ будем называть *базисными номерами*. Система ограничений принимает вид

$$B(x^{j_1}, \dots, x^{j_r})^T + \sum_{k \notin I(v)} A_k x^k = b.$$

Кроме того, согласно утверждению 1.2, все компоненты угловой точки v, отличные от базисных, заведомо равны нулю, поэтому, подставляя угловую точку в предыдущее равенство получаем $B\bar{v} = b$, где $\bar{v} = (v^{j_1}, \dots, v^{j_r})$ — вектор, составленный из базисных компонент угловой точки v, откуда $\bar{v} = B^{-1}b$. Умножая на B^{-1} наши уравнения для любой допустимой x получаем следующее соотношение между базисными и небазисными переменными:

$$0 \le \bar{v} = B^{-1}b = \gamma_0 = \bar{x} + \sum_{k \notin I(v)} (B^{-1}A_k)\, x^k.$$

Эта система уравнений называется *приведенной системой угловой точки v* с базисной матрицей B. Столбцы $B^{-1}A_k$ обозначим через γ_k, и, напомним, $\gamma_0 = B^{-1}b$, поэтому положим $A_0 = b$.

Замечание 1.4. О том как найти первую угловую точку мы поговорим ниже.

Выразив $\bar{x}$ через небазисные переменные, $\bar{x} = \bar{v} - \sum_{k \notin I(v)} B^{-1}A_k x^k$, запишем целевую функцию через небазисные переменные:

$$f(x) = \langle c, x\rangle = \langle \bar{c}, \bar{x}\rangle + \sum_{j \notin I(v)} c^j x^j = \langle \bar{c}, \bar{v}\rangle - \sum_{j \notin I(v)} \big(\langle \bar{c}, B^{-1}A_j\rangle - c^j\big) x^j = f(v) - \sum_{j \notin I(v)} \Delta_j x^j,$$

где $\Delta_j = \langle \bar{c}, B^{-1}A_j \rangle - c^j = \langle \bar{c}, \gamma_j \rangle - c^j$, где $\Delta_0 = f(v)$. Последняя форма записи называется *приведенной формой целевой функции*.

Заметим, что $\Delta_{j_p} = 0$ для любого $p = 1, \dots, r$, то есть $\Delta_k = 0$ для любого $k \in I(v)$.

Всю информацию будем хранить в так называемой *симплекс-таблице*, которая представляет собой матрицу

$$S = S(v, B) = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_n \\ \Delta_0 & \Delta_1 & \cdots & \Delta_n \end{pmatrix}.$$

Цель — изменить **небазисные** переменные так, чтобы значение функции уменьшилось. Причем менять будем не все сразу, а одну, скажем x^k, $k \notin I(v)$. То есть, будем искать новую точку $w = (w^1, \dots, w^n)$ в следующем виде: $w^j = 0$ для всех $j \notin I(v)$ кроме $j = k \notin I(v)$, для $j = k$ положим $w^k = t \geq 0$, тогда базисные w^{j_i}, $i = 1, \dots, r$ пересчитываются через $\bar{v}$ и небазисные w^j по формулам, которые мы уже выписали выше:

$$\bar{w} = \bar{v} - \sum_{i \notin I(v)} B^{-1}A_i w^i = \bar{v} - B^{-1}A_k t = \bar{v} - \gamma_k t$$

так как все слагаемые в сумме равны нулю, кроме k-го. В результате $f(w) = f(v) - \Delta_k t$, и нам надо выбрать k и t так, чтобы новая точка w осталась в X и $f(w) \leq f(v)$, а лучше бы неравенство было строгое. При этом условия $Aw = b$ выполнены по построению, поэтому остается контролировать только неравенства $\bar{w} \geq 0$ и $f(w) \leq f(v)$. Возможны следующие случаи.

Случай 1. Все величины Δ_j, $j = 1, \dots, n$ неположительны (нижняя строка симплекс-таблицы). Заметим, что $\Delta_{j_i} = 0$ по построению. Тогда, очевидно, нельзя добиться строгого неравенства $f(w) < f(v)$.

Лемма 1.5. *Если $\Delta_j \leq 0$, $j = 1, \dots, n$, то $v \in X_*$.*

Доказательство. Действительно, для любой $x \in X$ имеем

$$f(x) = f(v) - \sum_{j \notin I(v)} \Delta_j x^j \geq f(v),$$

так как каждое слагаемое $x^j D_j \leq 0$, что и требовалось. □

Таким образом, если нижняя строка симплекс-таблицы $S(v, B)$ состоит из неположежельных величин, то v — решение.

Случай 2. Существует такой номер $k \notin I(v)$, что

$$\Delta_k > 0, \qquad \text{и} \qquad \gamma_k = B^{-1}A_k \leq 0,$$

то есть в k-ом столбце симплекс-таблицы над положительным элементом Δ_k нет ни одной положительной величины. Тогда $\bar{w} = \bar{v} - B^{-1}A_k t \geq 0$ для любого $t \geq 0$, поэтому $w \in X$. С другой стороны, $f(w) = f(v) - \Delta_k t \to -\infty$ при $t \to \infty$, значит f не ограничена снизу на X и наша задача не имеет решения.

Случай 3. Существует такой номер k, $k \notin I(v)$, что $\Delta_k > 0$, и для каждого такого k существует i, $1 \leq i \leq r$, для которого $\gamma_{ik} = (B^{-1}A_k)^i > 0$ (в каждом столбце симплекс-таблицы, последний элемент которого положителен, есть еще один положительный элемент γ_{ik}). Тогда для любого такого k будет выполнено неравенство $f(w) = f(v) - \Delta_k t < f(v)$ при всех $t \geq 0$ и нужно только проверить $w \geq 0$. Положим $I_k(v) = \{i : 1 \leq i \leq r, \gamma_{ik} > 0\}$. Для компонент, номера которых не попали в $I_k(v)$ неотрицательность сохраняется для любого $t \geq 0$, поэтому нужно отследить только w^i, $i \in I_k(v)$. Так как $w^i = v^i - \gamma_{ik}t$, ясно, что неотрицательность w^i равносильна условию $t \leq v^i/\gamma_{ik}$, а неотрицательность всех w^i — условию

$$t \leq \min\nolimits_{i \in I_k(v)} \frac{v^i}{\gamma_{ik}}.$$

Так как множество $I_k(v)$ не пусто и конечно по построению, указанный минимум достигается при некотором $s \in I_k(v)$. Каждый элемент γ_{sk} симплекс-таблицы, на котором достигается минимальное значение v^s/γ_{sk} называют *разрешающим* или *ведущим элементом* таблицы. Положим $t_* = v^s/\gamma_{sk} = \gamma_{s0}/\gamma_{sk}$ и построим точку $w = (w^1, \ldots, w^n)$, положив

$$w^{j_i} = v^{j_i} - \gamma_{ik}\, t_* = \gamma_{i0} - \gamma_{ik}\frac{\gamma_{s0}}{\gamma_{sk}}, \quad i = 1, \ldots, r; \qquad w^j = 0, \quad j \notin I(v),\, j \neq k; \qquad w^k = t_*.$$

По построению $w \in X$ и $f(w) = f(v) - \Delta_k t_* \leq f(v)$. Заметим также, что $w^{j_s} = 0$.

Утверждение 1.6. *В сделанных обозначениях, w — угловая точка множества X с базисом $A_{j_1}, \ldots, A_{j_{s-1}}, A_k, A_{j_{s+1}}, \ldots, A_{j_r}$.*

Доказательство. Действительно, по построению, $w^{j_s} = 0$ и $w^j = 0$ $j \notin I(v)$, $j \neq k$, поэтому условие $Aw = b$ записывается в виде

$$A_{j_1}w^{j_1} + \cdots + A_{j_{s-1}}w^{j_{s-1}} + A_{j_{s+1}}w^{j_{s+1}} + \cdots + A_{j_r}w^{j_r} + A_k w^k = b,$$

поэтому, согласно утверждению 1.2 достаточно проверить, что указанные столбцы линейно независимы.

Пусть существуют коэффициенты α_i не все равные нулю, для которых

$$\alpha_1 A_{j_1} + \dots + \alpha_{s-1} A_{j_{s-1}} + \alpha_{s+1} A_{j_{s+1}} + \dots + \alpha_r A_{j_r} + \alpha_k A_k = 0.$$

Представим столбец A_k в виде

$$A_k = B\,B^{-1}\,A_k = \sum_{i=1}^{r} A_{j_i} (B^{-1} A_k)^i = \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ik} A_{j_i},$$

где, напомним, $\gamma_{ik} = (B^{-1} A_k)^i$. Но тогда

$$\sum_{i \neq s}^{r} \alpha_i A_{j_i} + \alpha_k \sum_{i=1}^{r} \gamma_{ik} A_{j_i} = \sum_{i \neq s}^{r} (\alpha_i + \alpha_k \gamma_{ik}) A_{j_i} + \alpha_k \gamma_{sk} A_{j_s} = 0.$$

Система $A_{j_1}, \dots, A_{j_r}$, напомним, линейно независима (это базис исходной угловой точки v), поэтому все коэффициенты последней линейной комбинации равны нулю. Так как $\gamma_{sk} \neq 0$, то $\alpha_k = 0$ (коэффициент при A_{j_s}), но тогда и все остальные α_i равны нулю, что и доказывает линейную независимость. Тем самым, w — угловая точка. □

Замечание 1.7. Значение целевой функции $f(v)$ остается прежним при $v^s = 0$. Если же $v^s > 0$, то значение убывает.

Замечание 1.8. В доказательстве утверждения 1.6 нигде не использовано условие $\Delta_k > 0$. Это означает, что описанная выше конструкция позволяет переходить от одной угловой точки к другой при не пустом $I_k(v)$ и $v^s > 0$. При $v_s = 0$ точка не меняется, меняется только базис.

Замечание 1.9. При неоднозначности выбора разрешающего элемента обычно выбирают k наименьшим, а s из соображений максимальности знаменателя, т.е. величины γ_{sk}. Или, если среди возможных элементов есть 1, берут его.

Таким образом, мы построили некую процедуру, позволяющую последовательно переходить от одной угловой точки к другой не увеличивая целевую функцию.

1.6 Симплекс-таблица

Заполнять симплекс-таблицу напрямую — сложно, так как надо считать B^{-1}, что долго. Но если приведенная система для угловой точки v уже есть, то пересчитать приведенную систему для следующей угловой точки w можно быстро. Искомые преобразования похожи на метод Гаусса исключения переменных. А именно, если $\gamma_{sk} > 0$ выбран в качестве разрешающего элемента, то мы должны заменить базисную переменную x^{j_s} на x^k. Это значит мы так должны преобразовать нашу систему уравнений, чтобы k-ый столбец стал базисным (с единицей на s-ом месте). Опишем соответствующие преобразования.

Обозначим элементы строки симплекс-таблицы для угловой точки v через $\gamma_{ij}(v)$, $\Delta(v)$, $\Gamma_i(v)$, $\Delta(v)$. Имеем:

$$\Gamma_s(w) = \frac{\Gamma_s(v)}{\gamma_{sk}(v)}, \qquad \Gamma_i(w) = \Gamma_i(v) - \gamma_{ik}(v)\frac{\Gamma_s(v)}{\gamma_{sk}(v)}, \qquad \Delta(w) = \Delta(v) - \Delta_k(v)\frac{\Gamma_s(v)}{\gamma_{sk}(v)}.$$

1.7 Симплекс-метод: пример

Прежде чем разбираться с тем, всегда ли и как быстро этот процесс приводит к решению, рассмотрим примеры.

Пример. Пусть $f(x) = 10x^2 - x^3 + 4x^4 + x^5$, и

$$X = \bigl\{x \in \mathbb{R}^5 \mid x \geq 0, x^1 + 2x^3 + x^4 = 2, 2x^1 - x^3 + x^5 = 3, -x_1 + x^2 + x^3 = 1\bigr\}.$$

Запишем уравнения в виде

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} x^1 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x^2 + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x^3 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x^4 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x^5.$$

Эта система является приведенной для угловой точки $v_0 = (0, 1, 0, 2, 3)$ с базисом A_4, A_5, A_2. $I(v_0) = \{j_1 = 4, j_2 = 5, j_3 = 2\}$, $B_0 = (A_4, A_5, A_2) = E_3$.

Составим симплекс-таблицу. Первые три строки нам известны и так, последнюю считаем по формуле

$$\Delta_j = \langle \bar{c}, B_0^{-1} A_j \rangle - c^j = \bigl\langle (4, 1, 10), \gamma_j \bigr\rangle - c^j, \qquad \Delta_0 = f(v).$$

Имеем:

	баз. к-ты	v	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
$\Gamma_1(v)$	x^4	2	1	0	2	1	0
$\Gamma_2(v)$	x^5	3	2	0	-1	0	1
$\Gamma_3(v)$	x^2	1	-1	1	1	0	0
Δ		21	-4	0	18	0	0

Единственная положительная Δ_i у не базисных переменных — это Δ_3. В ее столбце есть два положительных элемента $\gamma_{13} = 2$ и $\gamma_{33} = 1$. Вычислим $\min\{\gamma_{10}/\gamma_{13}, \gamma_{30}/\gamma_{33}\} = \min\{2/2, 1/1\} = 1$. Минимум достигается на двух значениях s, возьмем γ_{33} в качестве разрешающего элемента. Поэтому мы делаем переменную x^3 базисной вместо x^2. Пересчитываем таблицу. Сначала делим строку $\Gamma_3(v)$ на разрешающий элемент γ_{33} и пишем ее в таблицу для w_1 (заменяя в столбце базисных переменных x^2 на x^3). Теперь считаем оставшиеся строки так: $\Gamma_i(w_1) = \Gamma_i(v) - \gamma_{i3}\Gamma_s(w_1)$. Имеем:

	баз. к-ты	w_1	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
$\Gamma_1(w)$	x^4	0	3	-2	0	1	0
$\Gamma_2(w)$	x^5	4	1	1	0	0	1
$\Gamma_3(w)$	x^3	1	-1	1	1	0	0
Δ		3	14	-18	0	0	0

Новая угловая точка $w_1 = (0, 0, 1, 0, 4)$, базис A_4, A_5, A_3, значение $f(w) = 3$.

Делаем следующий шаг. Единственная положительная Δ_i у не базисных переменных — это Δ_1. В ее столбце есть два положительных элемента $\gamma_{11} = 3$ и $\gamma_{21} = 1$. Вычислим $\min\{\gamma_{10}/\gamma_{11}, \gamma_{20}/\gamma_{21}\} = \min\{0/3, 4/1\} = 0$. Минимум достигается только при $s = 1$, разрешающий элемент определен однозначно, это $\gamma_{11} = 3$. Поэтому мы делаем переменную x^1 базисной вместо x^4. Пересчитываем таблицу. Сначала делим строку $\Gamma_1(w_1)$ на разрешающий элемент γ_{11} и пишем ее в таблицу для новой угловой точки w_2 (заменяя в столбце базисных переменных x^4 на x^1). Затем считаем оставшиеся строки так: $\Gamma_i(w_2) = \Gamma_i(w_1) - \gamma_{i1}\Gamma_1(w_1)$. Имеем:

	баз. к-ты	w_2	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
$\Gamma_1(w)$	x^1	0	1	$-2/3$	0	$1/3$	0
$\Gamma_2(w)$	x^5	4	0	$5/3$	0	$-1/3$	1
$\Gamma_3(w)$	x^3	1	0	$1/3$	1	$1/3$	0
Δ		3	0	$-26/3$	0	$-14/3$	0

Сама угловая точка $w_2 = (0, 0, 1, 0, 4) = w_1$ не изменилась, изменился базис, он теперь A_1, A_5, A_3, значение $f(w) = 3$ тоже, разумеется, не изменилось. Теперь все $\Delta_i \leq 0$, $i = 1, \ldots, n$, поэтому w_2 — решение.

Теорема 1. *Пусть множество X допустимых значений переменных канонической задачи линейного программирования непусто и невырождено,* $\mathrm{rank}A = r = m < n$, *и v_0 — произвольная угловая точка. Тогда симплекс процесс, начинающийся с точки v_0 и произвольного ее базиса завершится за конечное число шагов.*

Доказательство. Заметим, что базисов, угловых точек и соответствующих симплекс-таблиц — конечное число. Поэтому бесконечный симплекс-процесс возможен только если некоторая симплекс-таблица, угловая точка и базис будут повторяться бесконечное число раз. Последнее означает, что найдется такая возрастающая последовательность $\{p_i\}$, что если v_i и B_i — угловая точка и ее базис, полученные на i-ом шаге процесса, то $v_{p_i} = v$, $B_{p_i} = B$ и $S(v_{p_i}, B_{p_i}) = S$. При этом $f(v_{p_i}) = f(v)$, откуда из монотонности f следует, что $f(v_i) = f(v)$ при всех $i \geq p_1$.

Напомним, что при переходе от угловой точки v к угловой точке w значение функции пересчитывается по формуле $f(w) = f(v) - \Delta_k v^{j_s}/\gamma_{sk}$, где $\gamma_{sk} > 0$ и $\Delta_k > 0$. Поэтому равенство $f(w) = f(v)$ возможно только при $v^{j_s} = 0$, то есть только если угловая точка v — вырождена. Теорема доказана. $\square$