1.9 Алгоритм Венга (F. Hwang)

Оказывается от экспоненциального числа операций в алгоритме Мелзака можно избавиться, воспользовавшись несложными из геометрическими соображениями. Напомним, что экспоненциальное число операций возникает здесь из-за того, что на каждом шаге приходится строить правильный треугольник одним из двух способов. Но, с другой стороны, в случае трех граничных точек $\{A_1, A_2, A_3\}$ треугольник $A_iA_jA'_k$ очевидно нужно строить «снаружи» от исходного треугольника $A_1A_2A_3$, т.е. так, чтобы точки A'_k и A_k лежали в разных полуплоскостях по отношению к прямой A_iA_j. Оказывается в общем случае тоже можно разобраться, причем исходя из локальной геометрии граничного множества.

Изложенная здесь конструкция предложена F. Hwang-ом (Френк Венг) в конце 80-х годов прошлого века.

1.9.1 Локальные конфигурации

Пусть G — бинарное дерево с границей $M \subset \mathbb{R}^2$. Если M состоит из двух точек, то соответствующее локально-минимальное дерево представляет собой отрезок прямой, соединяющий эти точки и существует всегда. Если M состоит из трех точек, то, дерево G — это звезда с вершиной степени три и мы имеем дело с задачей Ферма. Ее решение, описанное в начале раздела, это и есть алгоритм Мелзака, примененный в этой конкретной ситуации. Правильный треугольник в этом случае нужно строить снаружи от исходного треугольника с вершинами в M.

Перейдем к общему случаю. Напомним, что по лемме 1.18, в дереве G имеется, по крайней мере, двое непересекающихся усов. Мы выделим следующие две локальные конфигурации.

(1.) Пусть (e, e') и (f, f') — пара непересекающихся усов в дереве G. Обозначим через s_e и s_f общие вершины соответственно для первых и для вторых усов. Мы скажем, что эти двое усов *смежны*, если существует вершина s, смежная одновременно с s_e и s_f. Далее, пусть (e, e') — усы, и s_e — вершина, общая для ребер из этих усов.

(2.) Снова пусть (e, e') — усы дерева G, и s_e — их общая вершина. Пусть f — ребро, соединяющее некоторую вершину степени 1 с некоторой (внутренней) вершиной v_f. Мы скажем, что усы (e, e') и ребро f *смежны*, если вершины s_e и v_f соединены ребром.

Имеет место следующее утверждение легко доказывается по индукции.

Лемма 1.21. *Пусть G — произвольное 2-дерево, содержащее не менее четырех вершин степени 1. Тогда в G или существует пара смежных усов, или имеются усы, смежные ребру, инцидентному вершине степени 1.*

Итак, достаточно рассмотреть два случая. Пусть сначала в дереве G существует пара смежных усов (e, e') и (f, f'). Обозначим через E, E', F и F' граничные вершины

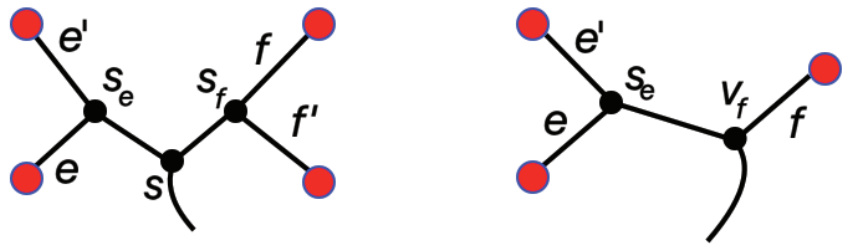

Рис. 4: Конфигурации Венга. Слева смежные пары усов, справа усы, смежные с граничным ребром.

из G, инцидентные e, e', f и f' соответственно. Пусть ℓ_e и ℓ_f — прямые, проходящие соответственно через E, E' и F, F'.

Утверждение 1.22. *Если существует локально минимальное дерево типа G с границей M, то или точки E и E' лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_f, или точки F и F' лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_e.*

Пусть точки E и E' лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_f. Тогда если вершина B треугольника ABA', построенного на точках F и F', лежит в той же полуплоскости, что и точки E и E', то эта реализация прямого хода алгоритма Мелзака не приводит к построению искомой сети.

Следующая лемма также элементарна.

Перейдем теперь ко второму случаю, а именно, когда в дереве G имеются некоторые усы (e, e'), смежные с некоторым ребром f, инцидентным вершине степени 1. Обозначим через E, E' и F соответственно граничные вершины, инцидентные ребрами e, e' и f. Обозначим через ℓ_e прямую, проходящую через E и E'. Легко видеть, что имеет место следующий результат.

Утверждение 1.23. *Если существует минимальная реализация дерева G, то точка F не лежит на прямой ℓ_e. Более того, при правильном выборе треугольника ABA', построенного на точках E и E', вершина B и точка F должны лежать в разных открытых полуплоскостях относительно прямой ℓ_e.*

1.9.2 Правила Венга

Итак, правильный выбор правильных треугольников на i-ом шаге прямого хода алгоритма Мелзака в случае, когда текущее дерево G_i имеет не менее четырех граничных вершин, заключается в следующем.

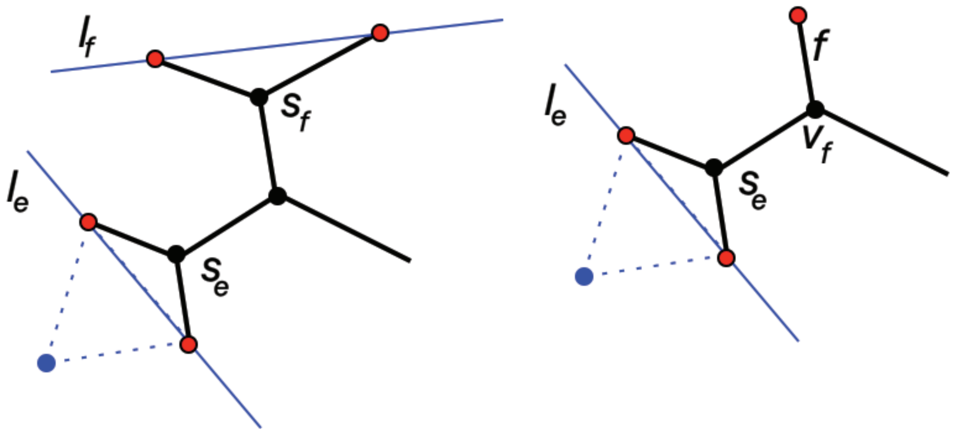

Рис. 5: Выбор треугольника по правилам Венга. Слева смежные пары усов, справа усы, смежные с граничным ребром.

Если имеются усы (e, e'), смежные с граничным ребром f, то сначала проверяем, различны ли граничные вершины E, E' и F, инцидентные соответственно e, e' и f (если нет, то эта реализация прямого хода плохая) и не лежит ли вершина F на прямой ℓ_e, проведенной через E и E' (если лежит, то эта реализация прямого хода плохая). Иначе располагаем третью вершину треугольника, который строится на вершинах E и E' так, чтобы она и точка F лежали в разных полуплоскостях по отношению к прямой ℓ_e.

Если не существует усов, смежных с граничным ребром, то обязана существовать пара смежных усов, скажем (e, e') и (f, f'). Пусть E, E', F, F' — граничные вершины ребер e, e', f, f' соответственно. Проверяем, различны ли точки E, E', F и F' (если нет, то эта реализация прямого хода плохая) и не пересекаются ли отрезки $[E, E']$ и $[F, F']$. Если пересекаются, то эта реализация прямого хода плохая. Иначе выбираем ту пару точек из (E, E') и (F, F'), которая лежит в одной открытой полуплоскости относительно прямой, проведенной через другую пару. Пусть, например, точки E и E' лежат с одной стороны относительно прямой ℓ_f, проведенной через F и F'. Тогда строим правильный треугольник на вершинах F и F' так, чтобы его третья вершина и точки E и E' располагались в разных полуплоскостях относительно прямой ℓ_f.

Таким образом, правила Венга позволяют на каждом шаге прямого хода алгоритма Мелзака выбрать усы так, что для них выбор правильного треугольника определен однозначно. Тем самым, выбирается одна из возможных 2^{n-2} возможных реализаций прямого хода алгоритма Мелзака.

Следствие 1.24. *Для каждого бинарного дерева G с границей M существует не более одного локально минимального дерева типа G с границей M.*