

1.13 Теоремы двойственности

Оказывается общая задача

$$f(x) = \langle c_1, x_1 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in X, \quad (5)$$

где

$$x = (x_1, x_2) \in X = \{A_{11}x_1 + A_{12}x_2 \leq b_1, \quad A_{21}x_1 + A_{22}x_2 = b_2, \quad x_1 \geq 0\},$$

$x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, $b_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $i = 1, 2$, тесно связана с другой задачей линейного программирования, а именно вот с этой:

$$\psi(\lambda) = -\langle b_1, \lambda_1 \rangle - \langle b_2, \lambda_2 \rangle \rightarrow \sup, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}^{m_i}, \quad (6)$$

где

$$\Lambda = \{A_{11}^T \lambda_1 + A_{21}^T \lambda_2 + c_1 \geq 0, \quad A_{12}^T \lambda_1 + A_{22}^T \lambda_2 + c_2 = 0, \quad \lambda_1 \geq 0\}.$$

Эта задача называется *двойственной* по отношению к (5).

Двойственная задача однозначно определяется по параметрам исходной. В частности, для канонической ЗЛП

$$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax = b\}$$

получим

$$\psi(\lambda) = -\langle b, \lambda \rangle \rightarrow \sup, \quad \lambda \in \Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^m : A^T \lambda + c \geq 0\}.$$

Посмотрим, как выглядит задача, двойственная к задаче 6. Для этого перепишем задачу 6 как задачу минимизации:

$$-\psi(\lambda) = \langle b_1, \lambda_1 \rangle + \langle b_2, \lambda_2 \rangle \rightarrow \inf, \quad \lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}^{m_i}, \quad (7)$$

где

$$\Lambda = \{(-A_{11}^T) \lambda_1 + (-A_{21}^T) \lambda_2 \leq c_1, \quad (-A_{12}^T) \lambda_1 + (-A_{22}^T) \lambda_2 = c_2, \quad \lambda_1 \geq 0\}.$$

Теперь двойственная задача к этой («дважды двойственная») выглядит так:

$$\psi_1(x) = -\langle c_1, x_1 \rangle - \langle c_2, x_2 \rangle \rightarrow \sup, \quad x = (x_1, x_2) \in X, \quad x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, \quad (8)$$

где

$$X = \{(-A_{11}^T)^T x_1 + (-A_{12}^T)^T x_2 + b_1 \geq 0, \quad (-A_{21}^T)^T x_1 + (-A_{22}^T)^T x_2 + b_2 = 0, \quad x_1 \geq 0\}.$$

Так как $\psi_1(x) = -f(x)$, и $(-A^T)^T = -A$, «дважды двойственная» задача (8) равносильна исходной. Поэтому говорят о *взаимной двойственности*.

Лемма 1.19. Пусть исходная задача (5) разрешима. Тогда множество Λ тоже не пусто, причем существует такая точка $\lambda^* \in \Lambda$, что $\psi(\lambda^*) = f_*$.

Доказательство. Докажем утверждение сначала для канонической задачи

$$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in X = \{x \in \mathbb{R}^n : x \geq 0, Ax = b\}.$$

Пусть сначала $m = r$. Применим модифицированный симплекс-метод. Так как задача разрешима по предположению, то процесс закончится обнаружением некоторой угловой точки $v_* \in X$ с базисом $B = (A_{j_1}, \dots, A_{j_r})$, $f(v_*) = f_*$, причем, так как процесс остановился, то выполнены неравенства

$$\Delta_j = \langle \bar{c}, B^{-1}A_j \rangle - c^j \leq 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad \bar{c} = (c_{j_1}, \dots, c_{j_n}).$$

Положим $\lambda^* = -(B^{-1})\bar{c}$. Напомним, что матрица перекидывается через скалярное произведение транспонированной. Имеем:

$$0 \geq \Delta_j = \langle \bar{c}, B^{-1}A_j \rangle - c^j = \langle (B^{-1})^T \bar{c}, A_j \rangle - c^j = -\langle \lambda^*, A_j \rangle - c^j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Эти неравенства в точности означают, что $A^T \lambda^* + c \geq 0$, откуда $\lambda^* \in \Lambda$, поэтому $\Lambda \neq \emptyset$. Далее, так как $\bar{v} = B^{-1}b$, а остальные координаты равны нулю, то

$$f_* = \langle c, v_* \rangle = \langle \bar{c}, \bar{v} \rangle = \langle \bar{c}, B^{-1}b \rangle = \langle (B^{-1})^T \bar{c}, b \rangle = -\langle \lambda^*, b \rangle = \psi(\lambda^*).$$

Пусть теперь $m > r$. Пусть именно первые r уравнений линейно независимы. Обозначим через $\bar{A}x = \bar{b}$ эквивалентную систему с выброшенными последними уравнениями. Тогда задача

$$f(x) = \langle c, x \rangle \rightarrow \inf, \quad x \in X_1 = \{x \geq 0 : \bar{A}x = \bar{b}\}.$$

Для такой мы все уже доказали, поэтому существует точка $\bar{\lambda}^* \in \mathbb{R}^r$, для которой $\bar{A}^T \bar{\lambda}^* + c \geq 0$ и $-\langle \bar{b}, \bar{\lambda}^* \rangle = f_*$. Определим $\lambda^* = (\bar{\lambda}^*, 0) \in \mathbb{R}^m$. Тогда для так полученной точки λ^* выполнены соотношения $A^T \lambda^* + c \geq 0$, $-\langle b, \lambda^* \rangle = -\langle \bar{b}, \bar{\lambda}^* \rangle = f_*$. Таким образом, утверждение доказано для канонической задачи.

Перейдем к общему случаю. Если общая задача разрешима, то разрешима и соответствующая ей каноническая задача

$$g(w) = \langle c, w \rangle \rightarrow \inf, \quad w \in \{Aw = b, w \geq 0\},$$

где $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^{n_2}$, $w = (x_1, z_1, z_2, y) \in \mathbb{R}^{2n_1+2n_2}$, $c = (c_1, c_2, -c_2, 0)$, $b = (b_1, b_2)$, $A_1 = (A_{11}, A_{12})$, $A_2 = (A_{21}, A_{22})$, и

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & -A_{12} & E_{n_1} \\ A_{21} & A_{22} & -A_{22} & 0 \end{pmatrix},$$

причем $g_* = f_*$. Для разрешимой канонической задачи найдется точка $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$, $\lambda_i^* \in \mathbb{R}^{m_i}$, для которой

$$A^T \lambda^* + c = \begin{pmatrix} A_{11}^T & A_{21}^T \\ A_{12}^T & A_{22}^T \\ -A_{12}^T & -A_{22}^T \\ E_{m_1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^* \\ \lambda_2^* \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_2 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0,$$

и

$$-\langle b_1, \lambda_1^* \rangle - \langle b_2, \lambda_2^* \rangle = g_* = f_*.$$

Ограничения имеют вид

$$\begin{aligned} A_{11}^T \lambda_1^* + A_{21}^T \lambda_2^* + c_1 &\geq 0, \\ A_{12}^T \lambda_1^* + A_{22}^T \lambda_2^* + c_2 &\geq 0, \\ -A_{12}^T \lambda_1^* - A_{22}^T \lambda_2^* - c_2 &\geq 0, \\ \lambda_1^* &\geq 0 \end{aligned}$$

Два противоположных неравенства означают, что имеет место равенство, поэтому $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*) \in \Lambda$ и $\psi(\lambda^*) = f_*$. Утверждение доказано. \square

Лемма 1.20. Пусть в прямой и двойственной задачах допустимые множества X и Λ непусты. Тогда

$$f(x) \geq \psi(\lambda) \quad \text{для всех } x \in X, \lambda \in \Lambda,$$

величины $f_* = \inf_{x \in X} f(x)$ и $\psi^* = \sup_{\lambda \in \Lambda} \psi(\lambda)$ конечны, причем $\psi^* \leq f_*$.

Доказательство. Возьмем произвольные $x \in X$, $\lambda \in \Lambda$. Воспользовавшись определяющими множество X неравенствами, имеем:

$$\begin{aligned} f(x) - \psi(\lambda) &= \langle c_1, x_1 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle + \langle b_1, \lambda_1 \rangle + \langle b_2, \lambda_2 \rangle \geq \\ &\geq \langle c_1, x_1 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle + \langle A_{11}x_1 + A_{12}x_2, \lambda_1 \rangle + \langle A_{21}x_1 + A_{22}x_2, \lambda_2 \rangle = \\ &= \langle c_1 + A_{11}^T \lambda_1 + A_{21}^T \lambda_2, x_1 \rangle + \langle c_2 + A_{12}^T \lambda_1 + A_{22}^T \lambda_2, x_2 \rangle = \\ &= \langle c_1 + A_{11}^T \lambda_1 + A_{21}^T \lambda_2, x_1 \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Поскольку это неравенство выполнено для любых $x \in X$ и $\lambda \in \Lambda$, оно сохраняется при переходе к точным верхней и нижней границам. Утверждение доказано. \square

Теорема 8. Взаимно двойственные задачи линейного программирования или одновременно разрешимы, или одновременно не разрешимы. Если задачи разрешимы, то $f_* = \psi^*$.

Доказательство. Пусть исходная задача имеет решение. Тогда по лемме 1.19 множество Λ не пусто и, более того, существует такая точка $\lambda^* \in \Lambda$, что $\psi(\lambda^*) = f_*$. Кроме того, $\psi(\lambda^*) \leq \psi^*$, поэтому, принимая во внимание лемму 1.20, имеем: $f_* = \psi(\lambda^*) \leq \psi^* \leq f_*$. Последнее возможно только при $\psi(\lambda^*) = \psi^* = f_*$. Поэтому λ^* — решение двойственной задачи, и, значит, двойственная задача разрешима и $f_* = \psi^*$. Таким образом, из разрешимости прямой задачи следует разрешимость двойственной и требуемое равенство. Обратное утверждение следует из того, что задача, двойственная к двойственной, эквивалентна исходной. \square

Теорема 9. *Взаимно двойственные задачи имеют решение тогда и только тогда, когда существуют такие $x_* \in X$ и $\lambda^* \in \Lambda$, что $f(x_*) = \psi(\lambda^*)$. Последнее равенство справедливо для всех $x_* \in X_*$ и $\lambda^* \in \Lambda^*$ и только для них.*

Доказательство. Пусть обе задачи разрешимы. Возьмем любые точки $x_* \in X_*$ и $\lambda^* \in \Lambda^*$, тогда, по определению, $x_* \in X$, $f(x_*) = f_*$, а $\lambda^* \in \Lambda$ и $\psi(\lambda^*) = \psi^*$. Но в силу теоремы 8 $f_* = \psi^*$, поэтому в качестве требуемых точек можно взять любые $x_* \in X_*$ и $\lambda^* \in \Lambda^*$.

Обратно, пусть для каких то точек $x_* \in X$ и $\lambda^* \in \Lambda$ выполнено равенство $f(x_*) = \psi(\lambda^*)$. Поэтому множества X и Λ не пусты и $f_* > -\infty$, $\psi^* < +\infty$. Поэтому из теоремы 6 вытекает, что обе задачи разрешимы, поэтому множества X_* и Λ^* не пусты. Тогда в силу теоремы 8 $f_* = \psi^*$. Отсюда, учитывая предположение, имеем: $f_* \leq f(x_*) = \psi(\lambda^*) \leq \psi^* = f_*$. Последнее возможно только при $f(x_*) = f_* = \psi^* = \psi(\lambda^*)$. Таким образом, мы показали, что $x_* \in X_*$, $\lambda^* \in \Lambda^*$. Теорема доказана. \square

Замечание 1.21. В силу леммы 1.20 условия теоремы 9 равносильны условиям

$$x_* \in X, \quad \lambda^* \in \Lambda^*, \quad f(x_*) \leq \psi(\lambda^*).$$

Теорема 10. *Взаимно двойственные задачи имеют решение тогда и только тогда, когда существуют такие $x_* \in X$ и $\lambda^* \in \Lambda$, что*

$$x_{1*}^j (A_{11}^T \lambda_1^* + A_{21}^T \lambda_2^* + c_1)^j = 0, \quad 1 \leq j \leq n_1, \quad (\lambda_1^*)^i (b^i - A_{11} x_{1*} - A_{12} x_{2*})^i = 0, \quad 1 \leq i \leq m_1.$$

Последнее равенство справедливо для всех $x_ \in X_*$ и $\lambda^* \in \Lambda^*$ и только для них.*

Доказательство. Пусть обе задачи разрешимы. По теореме 9, для всех $x_* \in X_*$ и $\lambda^* \in \Lambda^*$ выполнено равенство $f(x_*) = \psi(\lambda^*)$. Тогда

$$0 = f(x_*) - \psi(\lambda^*) \geq \langle c_1 + A_{11}^T \lambda_1^* + A_{21}^T \lambda_2^*, x_{1*} \rangle = \sum_{j=1}^{n_1} (c_1 + A_{11}^T \lambda_1^* + A_{21}^T \lambda_2^*)^j x_{1*}^j \geq 0.$$

По определению множеств X и Λ каждое слагаемое в этой сумме неотрицательно, поэтому первый набор равенств выполнен. Далее, из определения множества Λ имеем:

$$\begin{aligned} f(x) - \psi(\lambda) &= \langle c_1, x_1 \rangle + \langle c_2, x_2 \rangle + \langle b_1, \lambda_1 \rangle + \langle b_2, \lambda_2 \rangle \geq \\ &\geq \langle -A_{11}^T \lambda_1 - A_{21}^T \lambda_2, x_1 \rangle + \langle -A_{12}^T \lambda_1 - A_{22}^T \lambda_2, x_2 \rangle + \langle b_1, \lambda_1 \rangle + \langle b_2, \lambda_2 \rangle = \\ &= \langle b_1 - A_{11} x_1 - A_{12} x_2, \lambda_1 \rangle + \langle b_2 - A_{21} x_1 - A_{22} x_2, \lambda_2 \rangle = \langle b_1 - A_{11} x_1 - A_{12} x_2, \lambda_1 \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Поэтому при $x = x_*$ и $\lambda = \lambda^*$ из равенства $f(x_*) = \psi(\lambda^*)$ вытекает, что

$$\langle b_1 - A_{11}x_{1*} - A_{12}x_{2*}, \lambda_1^* \rangle = \sum_{i=1}^{m_1} (b_1 - A_{11}x_{1*} - A_{12}x_{2*})(\lambda_1^*)^i = 0,$$

и, так как все слагаемые неотрицательны, получаем второй набор равенств.

Обратно, пусть для точек x_* и λ^* выполнены равенства из условия теоремы. Тогда для них выполнены соотношения

$$\langle b_1 - A_{11}x_{1*} - A_{12}x_{2*}, \lambda_1^* \rangle = 0, \quad \langle c_1 + A_{11}^T \lambda_1^* + A_{21}^T \lambda_2^*, x_{1*} \rangle = 0.$$

Отсюда легко вывести, что $f(x_*) = \psi(\lambda^*)$. Тогда из теоремы 9 следует, что $x_* \in X_*$ и $\lambda^* \in \Lambda^*$. Теорема доказана. \square

Взаимодвойственные задачи часто помогают разобраться друг в друге. Например, пусть в задаче линейного программирования $b_1 = b_2 = 0$. Тогда у двойственной задачи $\psi(\lambda) = 0\lambda_1 + 0\lambda_2 = 0$, поэтому $\psi = 0$ для всех $\lambda \in \Lambda$, поэтому $\psi^* = 0 = f_*$. С другой стороны, очевидно, $0 \in X$, и так как $f(x) = 0 = f_*$, поэтому $0 \in X_*$.

Список литературы

- [1] F.P. Preperata, M.I. Shamos, *Computational Geometry, an Introduction*, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1985.
- [2] О. Борувка, “О jistem problemu minimalnm”, Prace Moravske Prrod. Spol. Brno, **3** (1926), 37–58.
- [3] M.I. Shamos, *Computational Geometry*, Ph.D. Thesis, Yale Univ., Dept. of Comp. Science (1978).