Доказательство. Действительно, планарная эквивалентность сетей Штейнера Γ_0 и Γ_1 означает, что существует непрерывная деформация Γ_t, $t \in [0,1]$, сети Γ_0 в сеть Γ_1 в классе вложенных сетей. Пусть γ_0 — произвольный путь в Γ_0. Деформация Γ_t порождает деформацию γ_t кусочно гладкой вложенной кривой γ_0 в классе вложенных кривых. Ясно, что деформация Γ_t может быть продолжена на малые хорошие окрестности всех вершин степени три сетей Γ_t, поэтому, очевидно, твистинги вершин пути γ_t не зависят от параметра деформации t, что и означает постоянность числа вращения для любой пары ребер из Γ_t. Доказательство закончено.

Число вращения между ребрами минимального бинарного дерева имеет прозрачный геометрический смысл.

Утверждение 2.3 *Пусть Γ — минимальное бинарное дерево, и a и b — произвольные его ребра. Обозначим через γ единственный путь в дереве, начинающийся на a и заканчивающийся на b. Тогда число вращения $\mathrm{tw}(a,b)$ между a и b равно кручению $\mathrm{tn}\,\gamma$ ориентированной от a к b ломаной γ.*

2.2 Алгоритм Мелзака

В данном разделе мы обсудим хорошо известный алгоритм Мелзака [81], позволяющий строить плоские локально минимальные 2-деревья данной топологии с данной границей. Более формально, пусть G — произвольное топологическое бинарное дерево, M_G — некоторое подмножество вершин из G, содержащее все его вершины степени 1, и пусть $\beta\colon M_G \to \mathbb{R}^2$ — произвольное граничное отображение, $\beta(M_G) = M$. Алгоритм Мелзака позволяет ответить на следующий вопрос: существует ли погруженная локально минимальная сеть $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ с границей β, или, как говорят, существует ли у G *(погруженная) минимальная реализация с границей* β.

Замечание. На самом деле алгоритм Мелзака работает и для произвольных деревьев Штейнера, не обязательно невырожденных. Для этого достаточно разбить произвольное дерево Штейнера в объединение бинарных деревьев — *невырожденных компонент*, и, если для каждой невырожденной компоненты существует бинарное минимальное дерево с соответствующей границей, то проверить под какими углами стыкуются невырожденные компоненты в вершинах степени два.

Замечание. Если нас интересует наличие вложенной локально минимальной сети $\Gamma\colon G \to \mathbb{R}^2$ с границей β, то после применения алгоритма Мелзака следует отдельно проверять, является ли построенная сеть вложенной. Отметим здесь же, что при использовании алгоритма Мелзака для построения абсолютно минимального дерева, вложенность построенных сетей проверять не нужно, так как абсолютно минимальное дерево будет вложенным автоматически.

Напомним алгоритм Мелзака. Прежде всего, можно предполагать без ограничения общности, что M_G совпадает с множеством всех вершин степени 1 бинарного дерева G. Действительно, как известно [46, 67], если

2-дерево G имеет минимальную реализацию с границей β, то эта реализация единственна. Поэтому, если какие-то вершины степени 3 попали во множество M_G, то следует сначала рассмотреть ограничение β_1 граничного отображения β на множество всех вершин степени 1 бинарного дерева G, проверить, существует ли минимальная реализация Γ_1 дерева G с границей β_1, и если да, то проверить, совпадает ли ограничение отображения Γ_1 на M_G с заданным отображением β. Итак, мы предполагаем, что M_G совпадает с множеством всех вершин из G степени 1.

Если G имеет ровно одно ребро, то, очевидно, минимальная реализация существует тогда и только тогда, когда образы граничных вершин этого дерева различны (напомним, что мы ищем погруженную минимальную сеть). Пусть теперь G состоит более чем из одного ребра.

Определение. Два смежных ребра произвольного 2-дерева G образуют *усы*, если каждое из них инцидентно вершине степени 1.

Доказательство следующей леммы представляет собой простое упражнение по теории графов.

Лемма 2.1 *Если 2-дерево G состоит из трех ребер, то каждая пара его ребер образует усы. Если же G имеет более трех ребер, то оно содержит, по крайней мере, двое непересекающихся усов.*

Итак, по лемме 2.1, дерево G имеет некоторые усы (e, e'). Пусть v и v' — вершины степени 1, инцидентные ребрам e и e' соответственно, а s — вершина степени 3, инцидентная одновременно ребрам e и e'. Обозначим через e'' третье ребро, инцидентное вершине s, а через w — отличную от s вершину, инцидентную ребру e''.

Если образы $A = \beta(v)$ и $A' = \beta(v')$ вершин v и v' при отображении β совпадают, то минимальной реализации не существует. В противном случае, построим правильный треугольник $AA'B$ одним из двух возможных способов.

Перестроим дерево G в дерево G', отрезав от G усы. Определи граничное отображение β' на множестве $M_{G'}$ всех вершин из G' степени 1, положив его равным β везде, кроме s, и определив $\beta'(s)$ равным B.

Следующая лемма вытекает из элементарных планиметрических построений.

Лемма 2.2 *Если 2-дерево G имеет минимальную реализацию Γ с границей β, то для одного из двух правильных треугольников $AA'B$ дерево G' имеет минимальную реализацию Γ' с границей β'. Минимальные сети Γ и Γ' совпадают на $G' \setminus e''$. При этом, луч с вершиной B в направлении точки $\Gamma'(w) = \Gamma(w)$ содержится внутри угла ABA' и содержит точку*

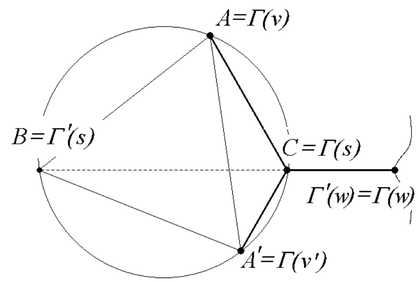

Рис. 4.4: Иллюстрация идеи алгоритма Мелзака.

$\Gamma(s)$, которая, в свою очередь, лежит на окружности S^1, описанной вокруг треугольника ABA'. В частности, точка $\Gamma'(w)=\Gamma(w)$ лежит вне круга, ограниченного окружностью S^1.

Обратно, если существует минимальная реализация Γ' дерева G' с границей β', и выполняются следующие условия:

- *луч с вершиной B в направлении точки $\Gamma'(w)$ содержится внутри угла ABA', и*
- *точка $\Gamma'(w)$ лежит вне круга, ограниченного окружностью S^1, которая описана вокруг правильного треугольника ABA',*

то существует минимальная реализация Γ дерева G с границей β, которая получается из Γ' так. Обозначим через C точку пересечения интервала $(\Gamma'(s),\Gamma'(w))$ с окружностью S^1. На всех ребрах из G, отличных от e, e' и e'', отображение Γ определим равным отображению Γ'. На ребрах e, e' и e'' определим его так, чтобы эти ребра переходили соответственно в отрезки $[C,A]$, $[C,A']$ и $[C,\Gamma'(w)]$ соответственно. При этом, конечно же, $\Gamma(s)=C$.

Итерируя описанный только что процесс перестройки дерева G и граничного отображения β в дерево G' и граничное отображение β' до тех пор, пока в результирующем дереве останется ровно одно ребро, мы реализуем *прямой ход алгоритма Мелзака.* Каждая итерация называется *шагом прямого хода алгоритма Мелзака.* Ясно, что если прямой ход состоит из n шагов, то существует 2^n реализаций прямого хода, в зависимости от выбора правильного треугольника ABA' на каждом шаге.

Для завершения алгоритма Мелзака, необходимо выполнить так называемый *обратный ход.* На первом шаге обратного хода мы проверяем, не совпали ли образы граничных вершин результирующего дерева, состоящего из одного ребра. Если нет, то строим минимальную реализацию этого дерева, отображая единственное его ребро в отрезок, соединяющий образы граничных вершин при результирующем граничном отображении. После этого, начинаем последовательно строить минимальные реализации деревьев, полученных на прямом ходе. Соответствующие построения мы уже описали в лемме 2.2. Если на одном из шагов обратного хода нарушаются условия леммы 2.2, то переходим к испытанию следующей из 2^n реализаций прямого хода. Таким образом, или при проверке очередной реализации прямого хода обратный ход алгоритма Мелзака приведет к построению искомой минимальной реализации, или будут проверены все 2^n вариантов и сделан вывод о том, что данное дерево G не имеет минимальной реализации с граничным отображением β.

Как мы уже отмечали, к успешному завершению прямого хода алгоритма Мелзака может привести не более одной реализации прямого хода. Алгоритм Мелзака, не умея отсеивать "неперспективные" последовательности, тратит много времени на работу с ними. Однако, оказывается, можно заранее понять, как устроена та единственная последовательность треугольников ABA', которая может привести к успешному завершению алгоритма Мелзака. Эту задачу решает алгоритм, предложенный Хвангом в [46].

2.3 Алгоритм Хванга

Изложенная здесь конструкция предложена Хвангом, см. [46].

Пусть G — 2-дерево с границей $\beta\colon M_G \to M \subset \mathbb{R}^2$, заданной на множестве M_G всех вершин из G степени 1. Начнем с рассмотрения случаев, когда дерево G содержит мало ребер.

Если G состоит ровно из одного ребра, то все очевидно, так как треугольники ABA' строить не надо.

Если G имеет три ребра, т.е. M_G состоит из трех вершин, то имеются следующие возможности: или все точки из $M = \beta(M_G)$ лежат на одной прямой (тогда, очевидно, минимальной реализации не существует), или точки из M образуют невырожденный треугольник. В последнем случае один из двух треугольников ABA' из прямого хода алгоритма Мелзака пересекается с внутренностью выпуклой оболочки $\operatorname{conv} M$ множества M, а другой — нет. Легко видеть, что тот ABA', который пересекает внутренность $\operatorname{conv} M$, никогда не приводит к положительному результату, т.е. к минимальной сети. Поэтому в этом случае однозначно определено "правильное" расположение треугольников ABA'.

Пусть теперь G состоит из пяти ребер, т.е. множество M_G содержит четыре вершины. Обозначим через (e, e') и (f, f') — имеющиеся две пары усов. Пусть E, E', F и F' — β-образы граничных вершин, инцидентных соответственно e, e', f и f'. Очевидно, если какие-либо из этих четырех точек совпадают, то искомую минимальную сеть построить нельзя. Пусть теперь все эти точки различны. Обозначим через ℓ_e и ℓ_f прямые, проходящие соответственно через E, E', и F, F'. Из элементарных планиметрических соображений вытекает, что если дерево G имеет минимальную реализацию с границей β, то точки E и E' должны лежать в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_f, а также точки F и F' должны лежать в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_e. Более того, если вершина B треугольника EBE', который строится на вершинах E и E', лежит в той же полуплоскости относительно ℓ_e, что и точки F и F', то это не приводит к минимальной реализации дерева G. Аналогичные рассуждения имеют место и для треугольника FCF' на вершинах F и F'. Таким образом, и в этом случае однозначно определено правильное расположение треугольников EBE' и FCF'.

Предположим теперь, что дерево G состоит более чем из 5 ребер, т.е. его граница состоит более чем из четырех вершин. Напомним, что по лемме 2.1, в дереве G имеется, по крайней мере, двое непересекающихся усов. Нам будут полезны следующие определения.

Пусть (e, e') и (f, f') — пара непересекающихся усов в дереве G. Обозначим через s_e и s_f общие вершины соответственно для первых и для вторых усов. Мы скажем, что эти двое усов *смежны*, если существует вершина s, смежная одновременно с s_e и s_f. Далее, пусть (e, e') — усы, и s_e — вершина, общая для ребер из этих усов. Пусть f — ребро, соединяющее некоторую вершину степени 1 с некоторой вершиной s_f. Мы скажем, что усы (e, e') и ребро f *смежны*, если вершины s_e и s_f соединены ребром. Имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.3 *Пусть G — произвольное 2-дерево, содержащее более 5 ребер. Тогда в G или существует пара смежных усов, или имеются усы, смежные ребру, инцидентному вершине степени 1.*

Итак, рассмотрим два случая. Пусть сначала в дереве G существует пара смежных усов (e, e') и (f, f'). Обозначим через E, E', F и F' β-образы граничных вершин из G, инцидентных e, e', f и f' соответственно. Пусть ℓ_e и ℓ_f — прямые, проходящие соответственно через E, E' и F, F'.

Лемма 2.4 *Если существует минимальная реализация дерева G, то или точки E и E' лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_f, или точки F и F' лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_e.*

Следующая лемма также элементарна.

Лемма 2.5 *Пусть точки E и E' лежат в одной открытой полуплоскости относительно прямой ℓ_f. Тогда если вершина B треугольника ABA', построенного на точках F и F', лежит в той же полуплоскости, что и точки E и E', то эта реализация прямого хода алгоритма Мелзака не приводит к построению минимальной сети.*

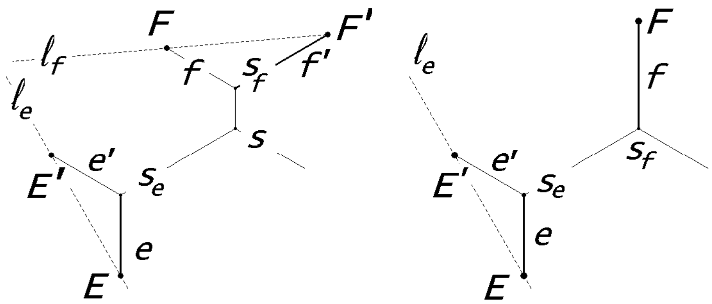

Рис. 4.5: Алгоритм Хванга.

Перейдем теперь ко второму случаю, а именно, когда в дереве G имеются некоторые усы (e, e'), смежные с некоторым ребром f, инцидентным вершине степени 1. Обозначим через E, E' и F соответственно β-образы граничных вершин, инцидентных ребрам e, e' и f. Обозначим через ℓ_e прямую, проходящую через E и E'. Легко видеть, что имеет место следующий результат.

Лемма 2.6 *Если существует минимальная реализация дерева G, то точка F не лежит на прямой ℓ_e. Более того, при правильном выборе треугольника ABA', построенного на точках E и E', вершина B и точка F должны лежать в разных открытых полуплоскостях относительно прямой ℓ_e.*

Итак, правильный выбор треугольников ABA' на i-ом шаге прямого хода алгоритма Мелзака в случае, когда текущее дерево G_i состоит более чем из 5 ребер, заключается в следующем.

Если имеются усы (e, e'), смежные с граничным ребром f, то сначала проверяем, различны ли β-образы граничных вершин, инцидентных e, e' и f (если нет, то эта реализация прямого хода плохая) и не лежит ли β-образ F граничной вершины, инцидентной f, на прямой ℓ_e, проведенной через β-образы граничных вершин, инцидентных усам (e, e'). Если лежит, то эта реализация прямого хода плохая. Иначе располагаем вершину B так, чтобы она была отделена прямой ℓ_e от F.

Если не существует усов, смежных с граничным ребром, то обязана существовать пара смежных усов, скажем (e, e') и (f, f'). Если E, E', F, F' — образы граничных вершин ребер e, e', f, f' соответственно, то проверяем, различны ли точки E, E', F и F' (если нет, то эта реализация прямого хода плохая) и не пересекаются ли отрезки $[E, E']$ и $[F, F']$. Если пересекаются, то эта реализация прямого хода плохая. Иначе выбираем ту пару точек из (E, E') и (F, F'), которая лежит в одной открытой полуплоскости относительно прямой, проведенной через другую из пар этих точек. Пусть, например, точки E и E' лежат с одной стороны относительно прямой ℓ_f, проведенной через F и F'. Построим треугольник ABA' на вершинах F и F' так, чтобы его вершина B была отделена прямой ℓ_f от точек E и E'.

2.4 Следствия из алгоритмов Мелзака и Хванга

Итак, мы выяснили, что, исходя из геометрии множества $M = \beta(M_G)$ и топологии дерева G можно однозначно определить правильный выбор треугольника ABA' на каждом шаге прямого хода алгоритма Мелзака. В дальнейшем, говоря об алгоритме Мелзака, мы всегда будем предполагать, что все треугольники ABA' выбираются именно так. Конечно, мы не гарантированы, что в результате обратного хода будет построена минимальная реализация дерева G, так как ее, вообще говоря, может и не существовать. Однако, если на каждом шаге обратного хода выполняются условия леммы 2.2, то такая реализация существует. Более того, из алгоритма Хванга–Мелзака вытекает следующая теорема единственности, полученная Хвангом [46], см. также обобщение этого результата в главе 5.

Предложение 2.1 *Для каждого дерева Штейнера G и граничного отображения $\beta\colon M_G \to \mathbb{R}^2$ существует не более одной минимальной реализации.*

Приведем еще одно полезное следствие из рассмотренных алгоритмов. Как было отмечено выше, для успешного завершения обратного хода алгоритма Мелзака необходимо и достаточно выполнение на каждом шаге условий леммы 2.2. Легко видеть, что если существует минимальная реализация 2-дерева G с граничным отображением β, то при малом шевелении границы, т.е. при малом изменении граничного отображения β, условия леммы 2.2 по-прежнему выполняются. Чтобы сформулировать соответствующий результат, введем следующее определение.

Пусть G — произвольное бинарное дерево, и M_G — некоторое подмножество множества его вершин. Введем на множестве всех отображений $\beta\colon M_G \to \mathbb{R}^2$ метрику ρ следующим образом. Если β и β' — два таких отображения, то положим

$$\rho(\beta,\beta') = \max_{v\in M_G} |\beta(v),\beta'(v)|.$$

Теорема 2.1 *Предположим, что 2-дерево G имеет минимальную реализацию Γ для некоторого граничного отображения β, заданного на множестве M_G всех вершин из G степени 1. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что для любого граничного отображения β', $\rho(\beta,\beta') < \varepsilon$, дерево G*

также имеет минимальную реализацию с граничным отображением β'. Иными словами, минимальные 2-деревья устойчивы при малых вариациях границы.

Более того, для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех граничных отображений β' дерева G, таких что $\rho(\beta', \beta) < \delta$, существуют минимальные реализации Γ' дерева G с границами β', и расстояние между образами $\Gamma(v)$ и $\Gamma'(v)$ произвольной вершины $v \in G$ при отображениях Γ и Γ' меньше ε. Иными словами, минимальная реализация дерева G непрерывно зависит от граничного отображения этого дерева.

Замечание. Теорема 2.1 не может быть обобщена на произвольные деревья Штейнера в силу того, что при малом шевелении граничного отображения угол между ребрами невырожденных компонент, стыкующихся в некоторой вершине степени 2, может стать меньше $120°$ (если, конечно, до этого он был в точности равен $120°$).

Напомним, что результатом прямого хода алгоритма Мелзака является пара точек. В качестве первого шага обратного хода мы строим отрезок, соединяющий полученные точки. Этот отрезок называется *линией Симпсона*. Отметим, что, в силу произвольности выбора усов на каждом шаге прямого хода, мы, вообще говоря, можем построить много разных линий Симпсона. На самом деле, существует естественное взаимно однозначное соответствие между линиями Симпсона и ребрами 2-дерева G. Действительно, в процессе прямого хода мы перестраиваем дерево G, отрезая от него выбранные усы. На последнем шаге прямого хода от дерева G остается ровно одно ребро, которое и надо поставить в соответствие полученной линии Симпсона. Несложно показать, что каждому ребру дерева G соответствует некоторая линия Симпсона. Более того, имеет место следующее утверждение [81].

Утверждение 2.4 *Если 2-дерево G имеет минимальную реализацию Γ с граничным отображением β, то длина любой линии Симпсона сети Γ равна длине этой сети.*

2.5 Теорема об общем положении

Пусть Γ — минимальное 2-дерево, затягивающее конечное множество M точек плоскости.

Определение. Будем говорить, что Γ *находится в общем положении*, если каждое его ребро e находится в общем положении с каждым отрезком $[m_i m_j]$, соединяющим любую пару вершин m_1, m_2 из M. Последнее означает, что ребро e может пересекаться с отрезком $[m_i m_j]$ лишь по одной точке, которая или является внутренней как для e, так и для $[m_i m_j]$, или принадлежит M.