

## Методы дискретной оптимизации (А.Иванов, весна 2020)

1. Остовное дерево в связном графе. Теорема Кирхгофа.
2. Количество остовных деревьев в полном графе.
3. Взвешенный граф. Минимальное остовное дерево.
4. Алгоритм Краскала.
5. Метрическое пространство. Граф в метрическом пространстве. ЕМОД.
6. ЕМОД и разбиения конечного подмножества евклидова пространства.
7. Формула Эйлера для плоского графа.
8. Диаграмма Вороного конечного множества точек плоскости.
9. Оценка числа вершин и числа ребер диаграммы Вороного.
10. Граф Делоне конечного множества точек плоскости.
11. Грани графа Делоне.
12. Граф Делоне и ЕМОД.
13. Ребра разных ЕМОД одного и того же множества не пересекаются.
14. Количество ребер и треугольников триангуляции Делоне.
15. Экстремальные свойства триангуляции Делоне.
16. Триангуляция Делоне и флипы.
17. Задача о коммивояжере. Связь с ЕМОД.
18. Формула вариации длины отрезка.
19. Кратчайшие деревья.
20. Локально минимальные деревья.
21. Локальная структура локально-минимального дерева.
22. Точка Торричелли треугольника.
23. Бинарные деревья. Усы.
24. Алгоритм Мелзака.
25. Линия Симпсона, ее связь с длиной сети.
26. Правила Венга.
27. Единственность локально-минимального дерева данного типа.
28. ОЗЛП
29. Задача планирования производства как ОЗЛП
30. Транспортная задача как ОЗЛП
31. Задача об использовании посевных площадей как ОЗЛП
32. КЗЛП и ОЗЛП, эквивалентность
33. Геометрическая интерпретация ОЗЛП
34. Угловая точка подмножества евклидова пространства.
35. Угловая точка множества допустимых значений и ее базис.
36. Вырожденная и невырожденная угловые точки.
37. Симплекс метод – общая схема.

38. Симплекс-таблица
39. Конечность симплекс метода в невырожденном случае.
40. Лексикографический порядок. Лексикографический минимум.
41. Существование лексикографического минимума конечного множества.
42. Лексикографический порядок и борьба с заикливанием симплекс-метода.
43. Метод искусственного базиса поиска угловой точки.
44. Теорема существования угловой точки допустимого множества значений переменных КЗЛП.
45. Критерий разрешимости КЗЛП.
46. Теорема существования угловой точки, являющейся решением КЗЛП.
47. Критерий разрешимости ОЗЛП.
48. Свойства множества допустимых значений переменных ОЗЛП.
49. Свойства множества решений ОЗЛП.
50. Двойственная задача для ОЗЛП.
51. Теорема о связи решений взаимно двойственных задач.
52. Теорема о связи значений целевых функций взаимно двойственных задач на множествах допустимых значений переменных.
53. Критерии разрешимости взаимно двойственных задач.

### ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ

1. Для множества вершин прямоугольника ABCD,  $AB=3$ ,  $BC=4$ , построить триангуляцию Делоне, диаграмму Вороного и все ЕМОД.
2. Для множества вершин прямоугольника ABCD  $AB=3$ ,  $BC=4$ , проверить существование локально минимальных бинарных деревьев, заданных следующими списками смежности. Дерево G1:  $\{A,\{E\}\}, \{B,\{E\}\}, \{C,\{F\}\}, \{D,\{F\}\}, \{E,\{A,B,F\}\}, \{F,\{C,D,E\}\}$ . Дерево G2:  $\{A,\{E\}\}, \{B,\{F\}\}, \{C,\{E\}\}, \{D,\{F\}\}, \{E,\{A,C,F\}\}, \{F,\{B,D,E\}\}$ . Если дерево существует – построить и вычислить длину. Если нет – обосновать.
3. Триангуляция выпуклого 15-угольника имеет пять внутренних вершин. Найти количество ее ребер и треугольников.
4. Пусть ABCD – множество вершин ромба,  $AB=BC=CD=DA=4$ ,  $BD=4$ . Найти множество точек плоскости, расстояние от которых до A меньше, чем до B, C и D.

5. Для треугольника с вершинами в точках  $A=(0,0)$ ,  $B=(2,0)$ ,  $C=(0,3)$  построить три линии Симпсона и точку Торричелли. Вычислить длину кратчайшей сети, соединяющей  $A, B$  и  $C$ .
6. Пусть  $M$  – множество вершин правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны 1. Найти количество ЕМОД на множестве  $M$  (использовать теорему Кирхгофа).
7. Найти все угловые точки и их базисы для множества  $X$ , заданного в  $R^4$  системой уравнений  $x_1+x_2+3x_3+x_4=3$ ,  $x_1-x_2+x_3+2x_4=1$ . Выяснить, какие из них вырожденные, а какие невырожденные.
8. Для следующей КЗЛП выписать двойственную задачу:  
 $f(x)=x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \rightarrow \inf, x \geq 0,$   
 $x_1+x_2+2x_3+x_4-2x_5=2, 2x_1-x_2+x_3+2x_4+x_5=1.$
9. Проверить, что точка  $v_0$  является угловой, найти ее базис, приведенную систему и решить КЗЛП:  $f(x)=x_1+2x_2+x_4+x_6 \rightarrow \inf,$   
 $x \geq 0, x_1+2x_2-x_3+2x_4-x_5+2x_6=0, x_1-4x_2+2x_3+2x_4-4x_6=1, 2x_1-$   
 $2x_2+x_3+4x_4+x_5-2x_6=3, v_0=(1,0,0,0,1,0).$
10. С помощью метода искусственного базиса найти какую-нибудь угловую точку следующего множества в  $R^4$ :  $x \geq 0,$   
 $x_1+x_2+x_3-x_4=2, x_1+x_3+2x_4=1, x_1+x_2+x_4=2.$
11. Решить геометрически следующую ЗЛП: найти точную верхнюю грань значений функции  $f(x,y) = -10x - 12y$  на множестве  $X$ , заданном системой неравенств  $112 + 11x - 5y \geq 0, 276 - 13x + 16y \geq 0, 138 + 13x + 9y \geq 0, 22 + 3x - 2y \geq 0, 270 - 15x - 9y \geq 0.$