

Спектры колебаний в дискретной системе фазовой синхронизации с неравномерной выборкой

© Авторы, 2009

М. В. Капранов

к. т. н., проф. МЭИ (Технического университета).
E-mail: KapranovMV@mpei.ru

А. Р. Сафин

студент МЭИ (Технического университета).
E-mail: safin_ansar@mail.ru

Исследованы спектры колебаний в зонах дробной кратности дискретной системы фазовой синхронизации с неравномерной выборкой. Показано, что наличие неравномерности приводит к «загрязнению» спектра выходного сигнала системы паразитными составляющими и к заметному ослаблению основных компонент спектра. Проведено компьютерное моделирование этих явлений в зависимости от исходного рассогласования синхронизируемых колебаний.

Ключевые слова: дискретная система фазовой синхронизации, неравномерная выборка, спектры.

In this paper oscillation spectrums of discrete phase synchronization systems with non-uniform sample in zones of fractional multiplicity are investigated. It is shown that availability of non-uniform sample reduce to fouling of a spectrum of a target signal by parasitic components and attenuation of basic components of a spectrum. Computer modelling these phenomena depending on an initial mismatch of synchronizable oscillations is lead.

Keywords: discrete phase synchronization systems, non-uniform sample, spectrum.

Введение

Системы фазовой синхронизации (СФС) широко применяются в различных областях радиотехники [1, 4 – 7, 9]. Среди большого числа различных СФС особое место занимают дискретные СФС (ДСФС), работающие с выборками входного сигнала [7, 11] и позволяющие получать на выходе системы колебания с дробно-рациональным отношением частот. Для примера, в теории синтеза частот такие системы позволяют получать высокопрецизионные колебания, не используя делителей частот, незаменимых в непрерывных СФС. Однако при неизбежном рассогласовании собственных частот синхронизируемых колебаний возникает неравномерность в выборке эталонного (поступающего на вход системы) сигнала. Это явление порождает существенное «загрязнение» спектра выходного сигнала с заметным снижением основных составляющих спектра. В работе исследована природа разрушения спектра выходного сигнала ДСФС с неравномерной выборкой.

В первой части представлены известные из литературы [7] данные о работе ДСФС с неравномерной выборкой. Произведено сравнение работы непрерывной СФС и ДСФС с выборками в задачах синтеза колебаний с дробно-рациональным отношением частот (синтезаторах частот). Выведены математические выражения, описывающие работу

исследуемой системы, и рассмотрена методика изучения переходных и установившихся процессов с использованием диаграмм Ламерея – Кенигса (и их расширений). Поставлена задача о влиянии неоднородности в выборке входного сигнала на спектр генерируемых колебаний.

Во второй части исследована методика определения границ зон синхронизма различных кратностей с наперед заданной точностью. Подробно изучены случаи настройки 1:1, 1:2 и 1:3. Высшие кратности 1:n, которых можно достичь в ДСФС, рассмотрены аналогично случаю 1:3. Здесь же представлены некоторые результаты о появлении мультистабильности в системе.

В третьей части исследованы спектры колебаний в зонах с кратностями 1:1, 1:2 и 1:3 при подходе к границам зон соответствующих кратностей. Найдены численные зависимости спектральных составляющих от величины расстройки. Рассмотрены паразитные эффекты в зонах высшей (больше 3) кратности. Исследованы спектры двух типов выходных сигналов: синусоидальных и прямоугольных импульсов.

Синтез частот и ДСФС с неравномерной выборкой

Дискретные системы фазовой синхронизации (ДСФС) находят широкое применение в устройствах формирования гармонических колебаний с высоко-

прецизионными характеристиками (синтезаторах частот). Разберем некоторые преимущества ДСФС по сравнению с синтезатором частот, выполненным с использованием кольца фазовой автоподстройки частоты (ФАПЧ), широко распространенным на практике [1,4 – 6,9]. Структурная схема синтезатора частот с кольцом ФАПЧ приведена на рис. 1.

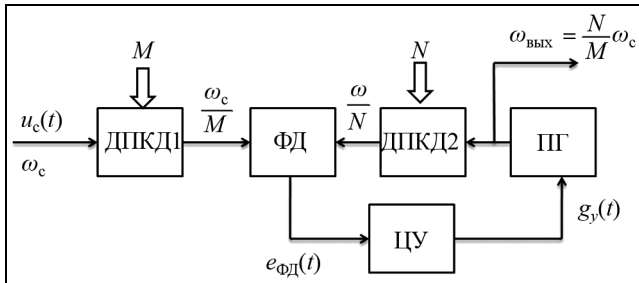


Рис. 1. Базовая схема синтезатора частот с кольцом ФАПЧ

На вход системы поступает сигнал $u_c(t)$ с частотой ω_c , проходит через делитель частоты ДПКД1 с переменным коэффициентом деления M и поступает на вход фазового дискриминатора (ФД). На второй вход ФД поступает сигнал от подстраиваемого генератора (ПГ), прошедшего через делитель частоты ДПКД2 с коэффициентом деления N . В ФД на частоте ω_c/M происходит сравнение приведенных фаз сигнала и ПГ. Если в кольце ФАПЧ установился режим фазовой синхронизации, то приведенные частоты совпадают, и выполняется равенство $\omega_{\text{вых}}/N = \omega_c/M$, где $\omega_{\text{вых}}$ – частота выходного колебания ПГ. Разность фаз колебаний, поступающих на входы ФД, а также напряжения на его выходе $e_{\text{фд}}(t)$ и управляющее напряжение на выходе цепи управления (ЦУ) $g_y(t)$ постоянны. Выходом системы является выход ПГ, на котором формируется колебание с частотой $\omega_{\text{вых}} = \frac{N}{M} \omega_c$.

Итак, синтезатор частот с кольцом ФАПЧ позволяет получать колебания с кратным (дробным) значением частоты. Причем кратность формируется за счет наличия в системе делителей ДПКД1 и ДПКД2. Одним из преимуществ ДСФС с неравномерной выборкой является то, что она позволяет формировать колебания с кратным значением частоты входного сигнала, не используя делители частот. Математической моделью такой системы является дифференциальное уравнение

$$p\phi = f(p)\Phi(\phi).$$

Здесь $p \equiv \frac{d}{dt}$ – оператор дифференцирования; $f(p)$ – символическая запись дифференциального оператора, действующего на некоторую функцию от текущей фазы $\Phi(\phi)$.

Структурная схема ДСФС с неравномерной выборкой представлена на рис. 2. Сигнал $u_c(t)$ с частотой ω_c поступает на вход импульсного фазового дискриминатора (ИФД), выполненного по схеме выборки и запоминания. На второй его вход в дискретные моменты времени поступают импульсы $v(t)$ из блока формирователя импульсов (ФИ). Импульсы $v(t)$ формируются за счет прохождения колебания $u_r(t)$ с выхода подстраиваемого генератора (ПГ) через блок ФИ. В момент прихода текущего импульса $v(t)$ в ИФД происходят выборка входного сигнала u_k (k – момент прихода текущего импульса) и запоминание его до момента прихода следующего импульса (рис. 3). Сигнал ошибки e_k , проходя через цепь управления (ЦУ), формирует напряжение g_k , которое и управляет частотой (или периодом) выходных ко-

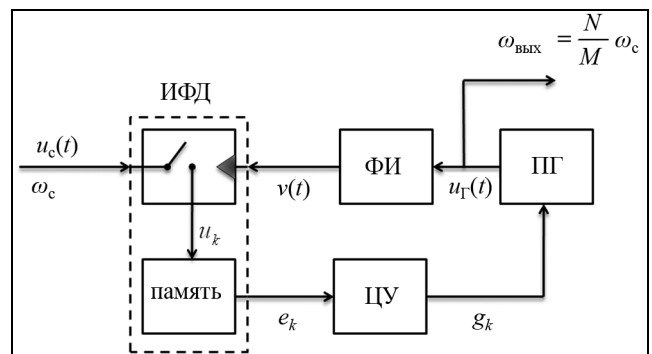


Рис. 2. Структурная схема ДСФС с неравномерной выборкой

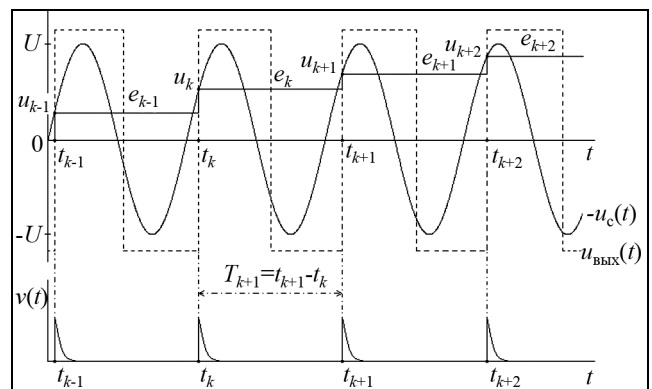


Рис. 3. Формирование выборок u_k входного гармонического сигнала и их запоминание e_k

лебаний ПГ. Выходом системы, как и в случае синтезатора с кольцом ФАПЧ, является выход ПГ. Существенным и главным отличием рассмотренной системы от первой является наличие выборок, что позволяет добиться «кратности» частот выходных колебаний без дополнительных блоков ДПКД1, ДПКД2. Отметим, что фигурирующая в названии системы неоднородность (далее будем использовать также синоним неравномерность) выборки входного сигнала является неотъемлемым ее свойством, что ведет к паразитным эффектам в спектре выходного сигнала.

Важным следствием наличия выборки в ДСФС является то, что математически ее работа описывается дискретным отображением (разностным уравнением) в отличие от синтезатора частот с кольцом ФАПЧ, работа которой описывается дифференциальным уравнением. Пусть входной сигнал $u_c(t)$ представляет собой 2π -периодическую функцию времени $F[\cdot]$ (это может быть сигнал, поступающий от некоторого опорного генератора)

с заданными амплитудой U_0 , частотой $\omega_c = \frac{2\pi}{T_c}$,

где T_c – период сигнала, и начальной фазой θ_0 . Запишем следующее общее выражение для $u_c(t)$:

$$u_c(t) = U_0 F[\omega_c t + \theta_0] = U_0 F[\varphi_c(t)]. \quad (1)$$

В общем случае входной сигнал может иметь произвольный вид. В дальнейшем нас будет интересовать входной сигнал с нелинейностью $F[\cdot]$ вида

$$F[\varphi_c(t)] = \sin(\varphi_c(t)), \quad (2)$$

т. е. простейшее гармоническое колебание на входе. Подставив (2) в (1), имеем

$$u_c(t) = U_0 \sin(\omega_c t + \theta_0) = U_0 \sin(\varphi_c(t)). \quad (3)$$

В схеме ИФД в моменты t_k , соответствующие переднему фронту колебаний ФИ, производится выборка u_k входного сигнала $u_c(t)$ (рис. 3). Управляющее напряжение, поступающее на вход ПГ g_k в случае бесфильтровой ДСФС равно e_k . Управление моментом времени t_{k+1} следующей выборки может осуществляться в двух вариантах: управление периодом и частотой колебаний ПГ. В дальнейшем для простоты нас будет интересовать случай управления периодом колебаний ПГ. Отметим, что управление частотой ПГ не вносит существенных отличий в физику работы системы [7].

Итак, напряжение g_k линейно управляет интервалом $T_{k+1} = t_{k+1} - t_k$ до появления следующей выборки, т.е. периодом колебаний ПГ:

$$T_{k+1} = t_{k+1} - t_k = T_{св} - S_T g_k, \quad (4)$$

$T_{св}$ – период свободных колебаний ПГ (при $g_k = 0$); S_T – крутизна модуляционной характеристики управителя периодом ПГ.

Непосредственно из (4) запишем зависимость $t_{k+1} = f(t_k)$ с учетом (3):

$$t_{k+1} = t_k + T_{св} - T_M \sin[\omega_c t_k + \theta_0], \quad (5)$$

где введено обозначение $T_M = S_T U_0$ – наибольшее отклонение периода колебания, вырабатываемого ПГ.

Перейдем теперь к выборкам фазы $\phi = \omega_c t + \theta_0$. Для этого умножим (5) на ω_c и добавим в обе части значение начальной фазы θ_0 . Обозначив наибольшую девиацию фазы $K = \omega_c T_M$, имеем

$$\phi_{k+1} = \phi_k + 2\pi B - K \sin[\phi_k], \quad (6)$$

где $B = \frac{T_{св}}{T_c} = \frac{\omega_c}{\omega_{св}}$ – исходное рассогласование частот сигнала и свободных колебаний ПГ.

Отображение (6) по форме напоминает широко известное в теории дискретных отображений *отображение окружности*, которое с учетом введенных обозначений можно записать в виде

$$\phi_{k+1} = \phi_k + 2\pi B - K \sin[\phi_k], \text{mod}(2\pi). \quad (7)$$

Разница отображений (6) и (7) заключается в наличии у последней операции $\text{mod}(2\pi)$, которая предполагает взятие дробной части от текущей фазы по модулю 2π . В математической литературе [2, 3, 10] изучается именно отображение (7). Ниже будет показано, что использование отображения (7) для ДСФС может приводить к ошибкам в работе системы.

Диаграммы Ламерея – Кенигса и необходимость их расширения для изучаемой системы

Рассмотрим проблему изучения динамики отображений (6) и (7). Дискретные отображения рассматривают на поверхности цилиндра, как это делается в теории непрерывных систем фазовой синхронизации [4, 6]. Такое представление дискретного отображения удобно тем, что позволяет использовать графическое построение динамического процесса по методу диаграмм Ламерея – Кенигса. Оно показано на рис. 4 для некоторого

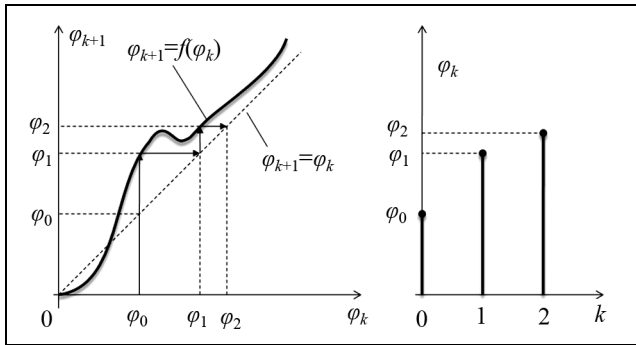


Рис. 4. Диаграмма Ламерея – Кенигса (слева) и временной процесс (справа)

отображения $\phi_{k+1} = f(\phi_k)$ (по осям координат откладываются ϕ_{k+1} и ϕ_k). По этому методу строится и временной процесс ϕ_k от k .

Поскольку нас интересуют колебания, которые будут наблюдаться в системе на выходе ДСФС, будем представлять диаграмму Ламерея – Кенигса, а справа от нее временные реализации исходного сигнала и выборки.

Рассмотрим сначала точную настройку ПГ на частоту сигнала, при этом $B=1$, т. е. на один период входного сигнала приходится одна выборка. На рис. 5 представлены диаграмма (слева) и временной процесс (справа). Из рисунка следует, что переходный процесс заканчивается «по прошествии» трех периодов входного сигнала, а далее выборки следуют с частотой, равной частоте входного сигнала, т. е. наступает 1Т-цикл [7]. Имеют место три неподвижные точки $\hat{\phi} = 0$, $\hat{\phi} = \pi$ и $\hat{\phi} = 2\pi$. Судить об их устойчивости следует по мультипликаторам.

Мультипликаторы μ неподвижных точек (крутизну функции отображения

$$f(\phi_k, B, K) = \phi_k + 2\pi B - K \sin[\phi_k]$$

найдем из выражения

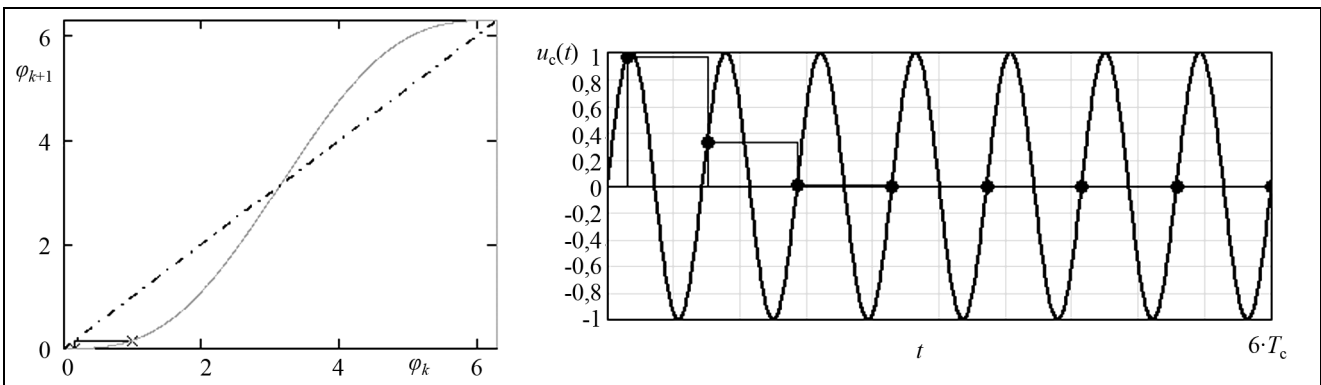


Рис. 5. Диаграмма Ламерея – Кенигса (слева) и временной процесс (справа) отображения окружности для случая $B=1$, $K=1$

$$\mu = \frac{\partial f(\hat{\phi}, B, K)}{\partial \hat{\phi}} = 1 - K \cos(\hat{\phi}). \tag{8}$$

Из (8) видим, что при $K=1$ мультипликатор равен нулю в двух точках $\hat{\phi} = 0$ и $\hat{\phi} = 2\pi$, а в точке $\hat{\phi} = \pi$ $\mu = 2$ и, следовательно, она неустойчива.

Итак, в зависимости от выбора начального условия $\phi_0 \in [0, \pi]$ или $\phi_0 \in [\pi, 2\pi]$ колебания стабилизируются на одном значении, т. е. наступит 1Т-цикл, соответствующий синхронизации ДСФС на основной частоте. На рис. 6 представлены диаграммы Ламерея – Кенигса и временные реализации отображения окружности при $B=1$, $K=1$ и двух начальных условиях $\phi_0 = 0,9\pi$ и $\phi_0 = 1,1\pi$. Вид переходного процесса в двух этих случаях будет различаться, но синхронизация достигается на основной частоте сигнала.

Обнаружить 1Т-цикл можно и при изменении параметра B в некотором диапазоне значений во-круг $B=1$ и $B=0$ (рис. 7).

Варьируя значениями параметров B и K можно обнаружить различные типы движения: синхронные и асинхронные колебания, хаос [7].

Остановимся на вопросе неоднозначности при выборе отображений (6) и (7) на примере 2Т-цикла. Пусть исходное расхождение частот сигнала и ПГ $B \approx 0,5$. Это означает, что на один период входного сигнала приходятся две выборки, что иллюстрируется рис. 8,а. Предположим, что $B \approx 1,5$, т. е. на три периода входного сигнала должны приходиться две выборки (рис. 8,б).

Теперь проверим, как отображение (7) «почувствует» разницу между $B=0,5$ и $B=1,5$.

Получаем для случая $B=0,5$

$$\phi_{k+1} = \phi_k + \pi - KF[\phi_k], \text{mod}(2\pi),$$

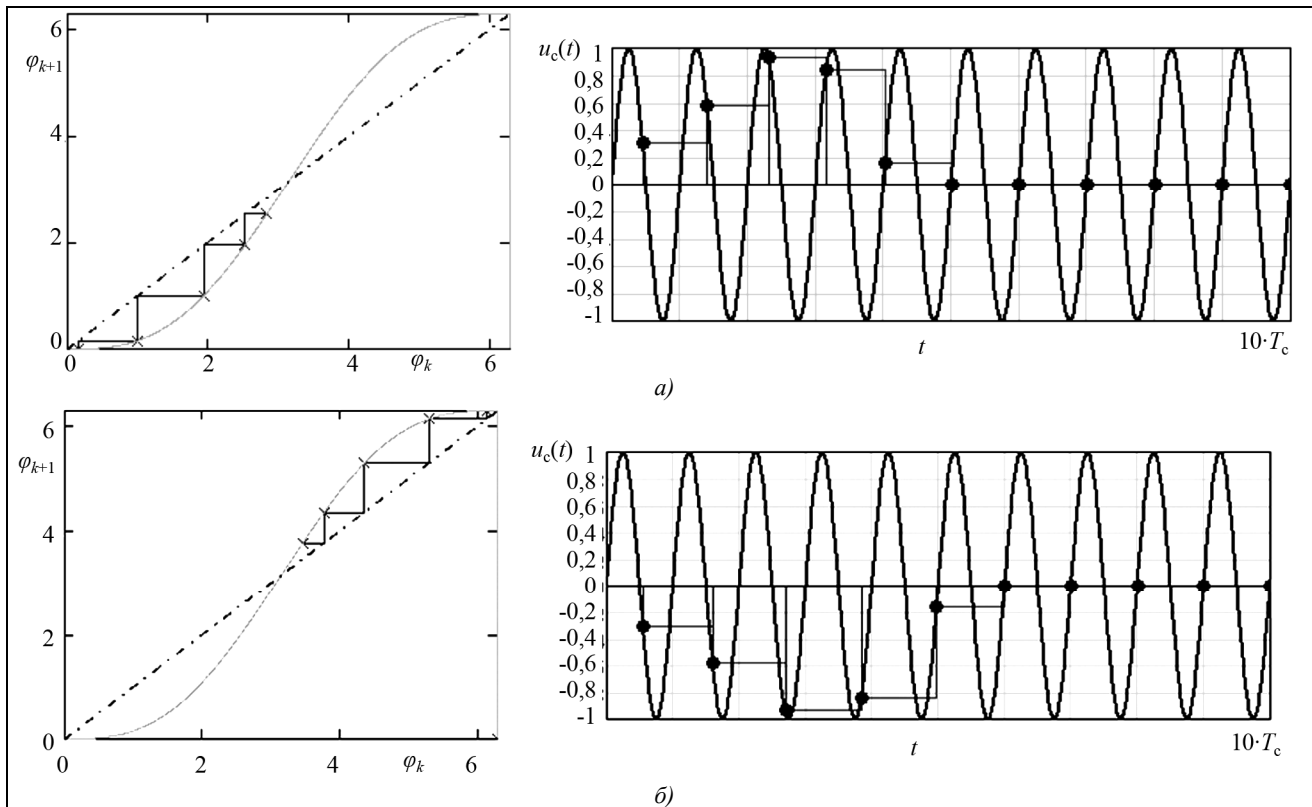


Рис. 6. Диаграммы Ламерея – Кенигса (слева) и временные реализации (справа) отображения окружности при $B = 1$, $K = 1$ и двух начальных условиях $\phi_0 = 0,9\pi$ (а) и $\phi_0 = 1,1\pi$ (б)

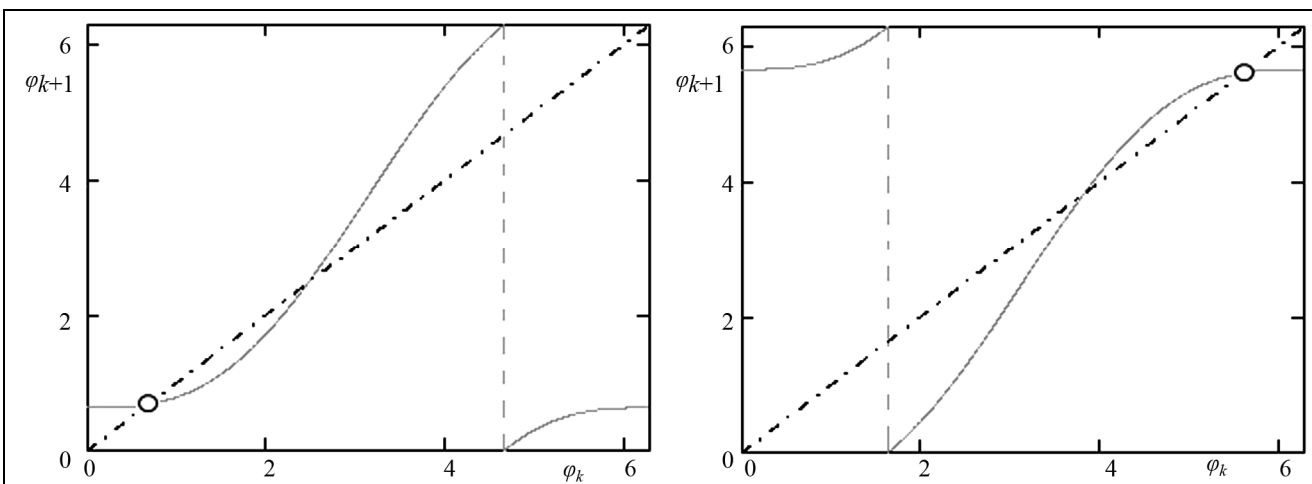


Рис. 7. Конструкция 1Т-циклов для $B = 0,1$ (слева) и $B = 0,9$ (справа)

для случая $B = 1,5$

$$\begin{aligned} \phi_{k+1} &= \phi_k + 3\pi - KF[\phi_k] = \\ &= \phi_k + \pi - KF[\phi_k], \text{mod}(2\pi), \end{aligned}$$

т. е. отображение (7) никак «не чувствует» разницу между режимами деления и умножения частот. Диаграммы Ламерея – Кенигса для двух этих случаев совпадают (рис. 8). Это может привести к серьезным ошибкам на практике.

Выход из подобной ситуации находим в исследовании отображения (6) вместо (7) и расширении диаграмм Ламерея – Кенигса [7] (рис. 9), «отказавшись» от операции $\text{mod}(2\pi)$.

На расширенных диаграммах Ламерея – Кенигса два этих процесса (с $B \approx 0,5$ и $B \approx 1,5$) уже четко различимы. В данном случае \approx означает приближенную настройку частоты сигнала и свободных колебаний ПГ. Итак, рассмотренный под-

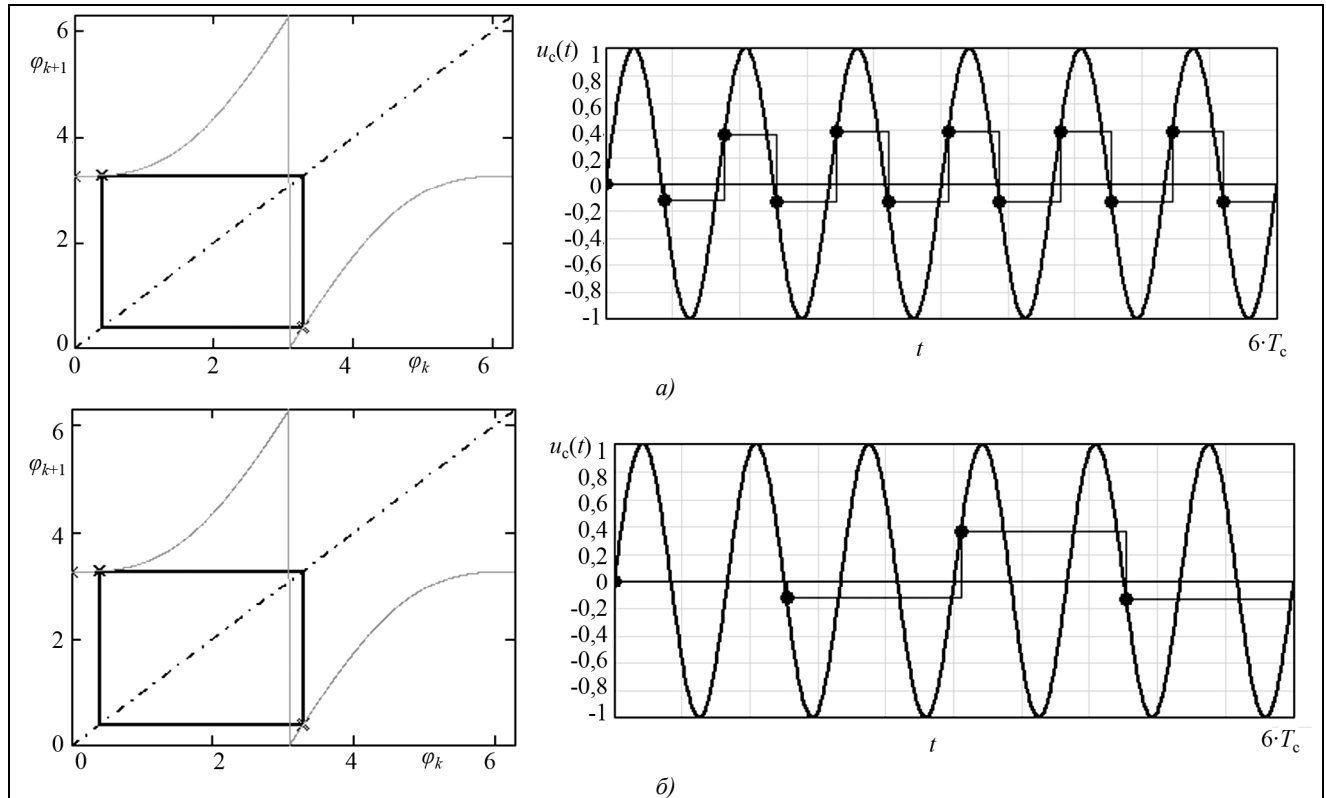


Рис. 8. Диаграммы Ламерея – Кенигса (слева) и временные реализации (справа), иллюстрирующие работу ДСФС при $B = 0,5$ (а) и $B = 1,5$ (б) для $K = 1$

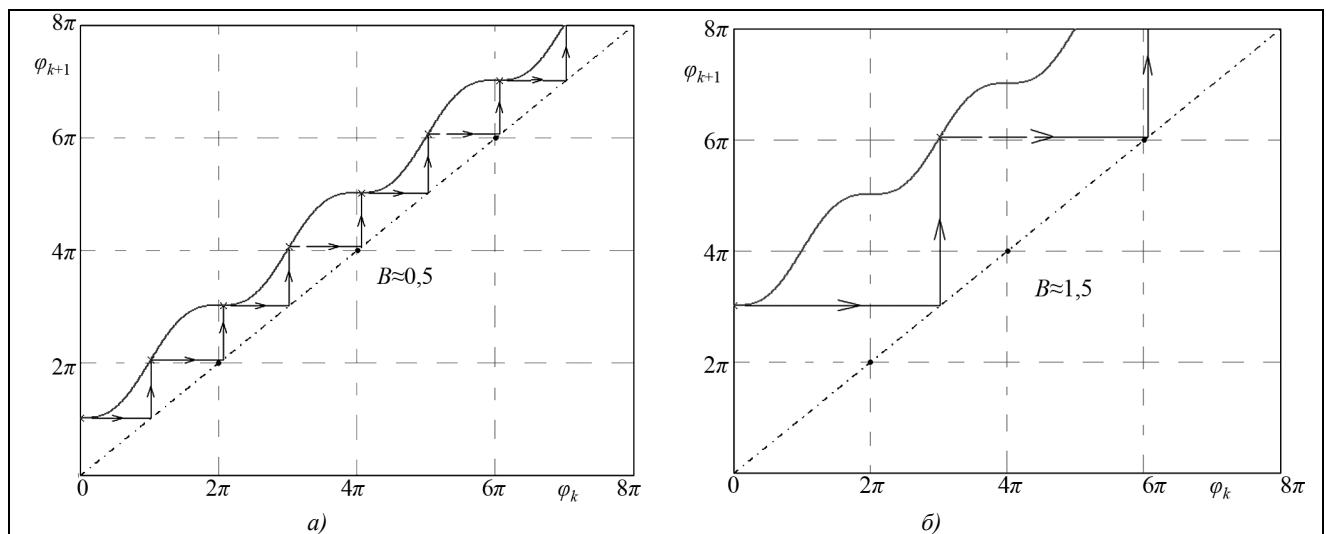


Рис. 9. Расширенные диаграммы Ламерея – Кенигса для двух случаев $B \approx 0,5$ (а) и $B \approx 1,5$ (б)

ход использования расширенных диаграмм Ламерея – Кенигса позволяет избавиться от недоразумений, связанных с множественностью временных реализаций для одних и тех же стандартных диаграмм Ламерея – Кенигса. Использование расширенных диаграмм Ламерея – Кенигса более наглядно, чем использование стандартных диаграмм, но менее компактно. Для сравнения на рис.

10 представлены стандартные и расширенные диаграммы Ламерея – Кенигса, когда в системе устанавливается 3Т-цикл (на один период сигнала приходится три выборки).

Далее при изучении регулярных колебаний будем пользоваться стандартными диаграммами Ламерея – Кенигса (в силу их большей компактности в отличие от расширенных) и, следовательно,

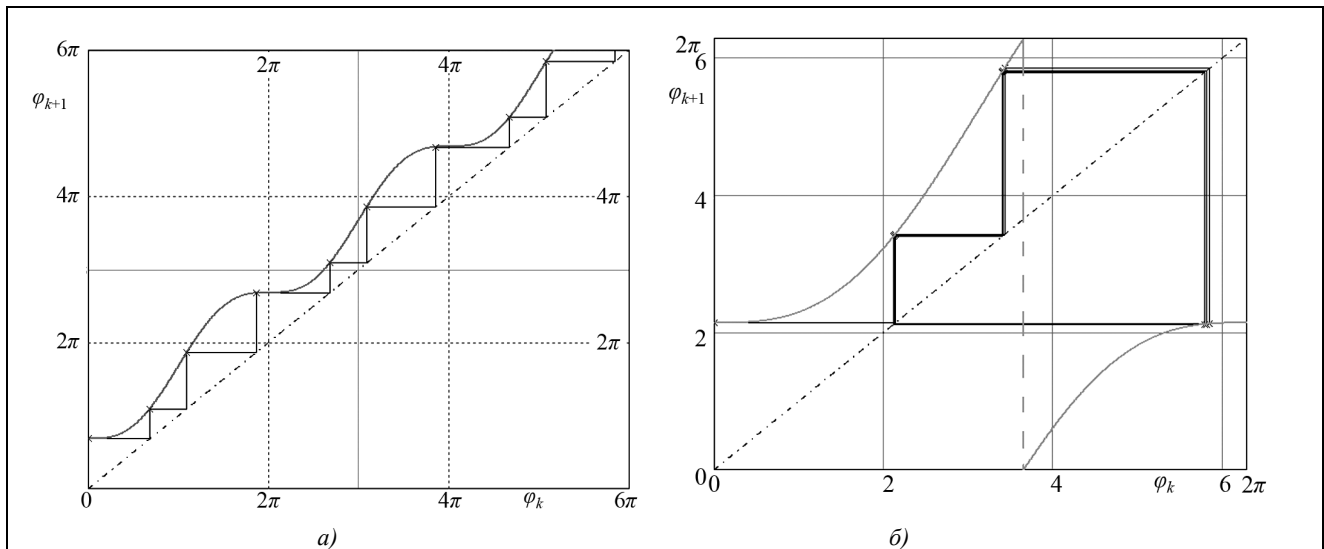


Рис. 10. Расширенная (а) и стандартная (б) диаграммы Ламерея – Кенигса в случае, когда в системе установился 3Т-цикл

отображением (7). Отметим существенный момент – построение временных реализаций ведется только по отображению (5) для текущего момента времени t_k , а далее производится подстановка t_k в (3).

Разобрав методику изучения колебаний ДСФС, перейдем к зонам синхронизма различной кратности и изучению регулярных колебаний.

Зоны синхронизма и регулярные колебания

Для исследования различных типов движений в ДСФС можно [7] формально перебирать все возможные значения параметров B и K . Поступая таким образом, можно обнаружить большое число различных NT -циклов (на рис. 11,а-г представлены некоторые из них). Они соответствуют синхронизации при различных дробно-рациональных соотношениях M/N частот свободных колебаний ПГ и сигнала. Разбиение плоскости параметров (K, B) на зоны синхронизма показано на рис. 12. Эта картина [3, 7, 8, 10] получила название «языков» Арнольда (по имени математика В. И. Арнольда, открывшего их в 1965 г.).

На рис. 12 построены не все зоны синхронизма (их бесконечное число). Наиболее широкая зона получается для кратности 1/1. На рис. 12 эта зона состоит из двух половинок на краях рисунка. Следующая по ширине зона имеет кратность 1/2, далее по размеру идут зоны 1/3 и 2/3, затем 1/4 и 3/4 и т. д. Чем больше числа M и N , тем выше порядок зоны синхронизма и тем меньшую область на диаграмме (рис. 12) занимает соответствующий «язык» Арнольда. Области между язы-

ками соответствуют асинхронным режимам. Если при $K < 1$ зафиксировать параметр K и менять B , то будет наблюдаться чередование периодических и квазипериодических колебаний.

Если «выйти» за $K = 1$, то можно обнаружить, что ближайшие языки начинают перекрываться, и режим начинает существенно зависеть от начальных условий, что является «предвестником» появления хаоса. Хаотические колебания в ДСФС с неравномерной выборкой рассматриваются в [7]. Ниже рассмотрены вопросы, связанные с мультистабильностью и построением зон синхронизма при больших значениях K (больше 1). Рассмотрим методику определения границ зон синхронизма (с любой наперед заданной точностью).

Определение границ зон синхронизма с кратностью 1:1

Фактически, определение границ зон синхронизма сводится к нахождению таких значений расстройки B при заданном коэффициенте усиления (максимальной девиации фазы) K , при которых внутри соответствующего «языка» на плоскости параметров (K, B) (рис. 12) достигается синхронизм нужной кратности. Для кратности 1:1 определение критического значения $B_{кр}$ для некоторого K иллюстрируется рис. 13. Здесь изучается «правая граница» (относительно $B = 1$). «Левая граница» (относительно $B = 0$) в силу симметрии «языков» Арнольда, являющаяся прямым следствием наличия в системе 2π , находится так: $B'_{кр} = 1 - B_{кр}$. Проиллюстрируем методику нахождения $B_{кр}$ для

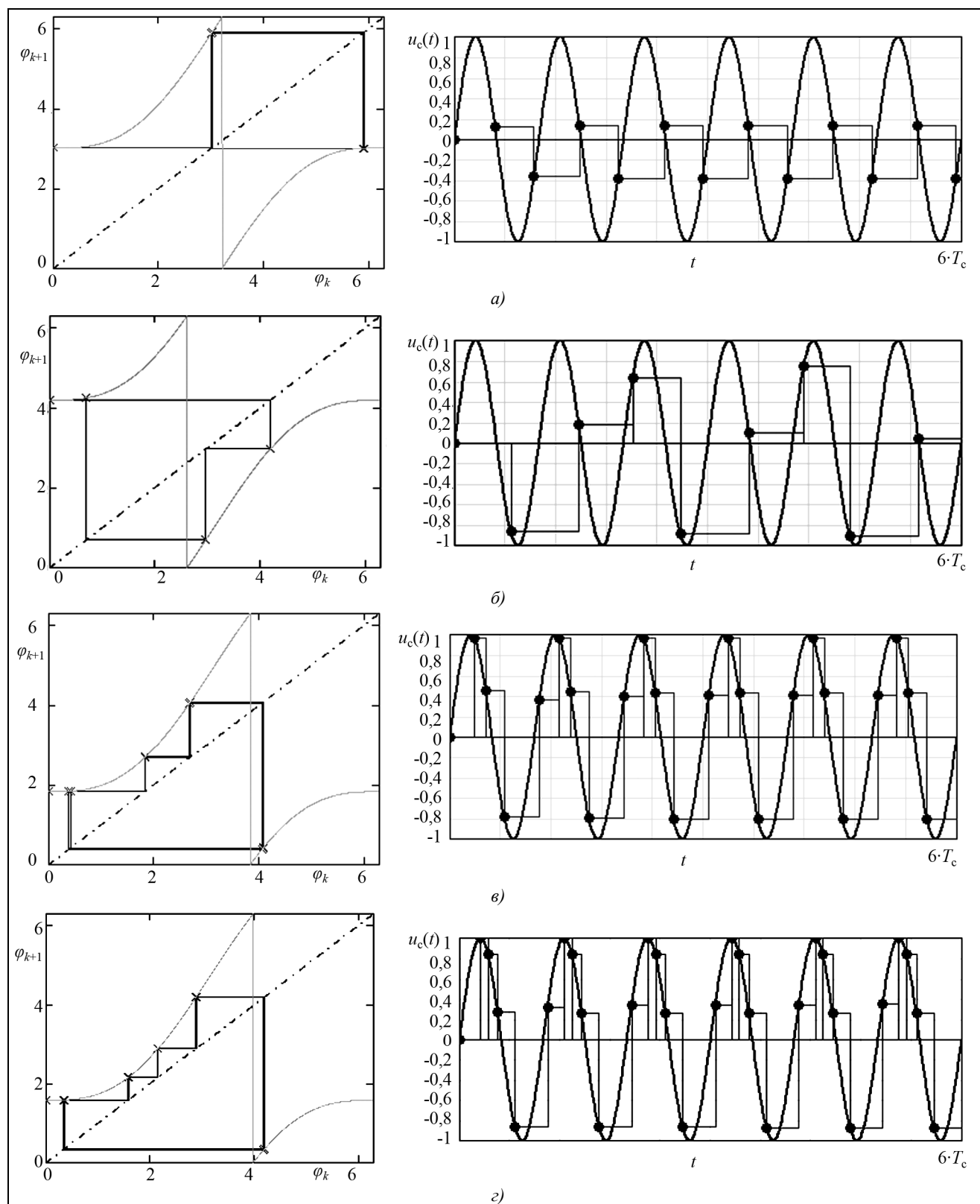


Рис. 11. Различные типы движения: а – 2Т-цикл ($B = 0,48$, $K = 1$); б – 3Т-цикл ($B = 0,6333$, $K = 1$); в – 4Т-цикл ($B \approx 1/4$, $K = 0,1$); г – 5Т-цикл ($B \approx 1/5$, $K = 0,1$)

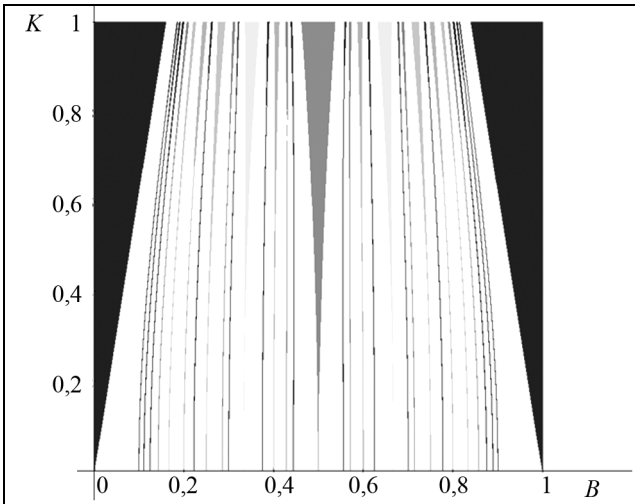


Рис. 12. Зоны синхронизма ДСФС с дробно-рациональным отношением частот («языки» Арнольда) из [7]

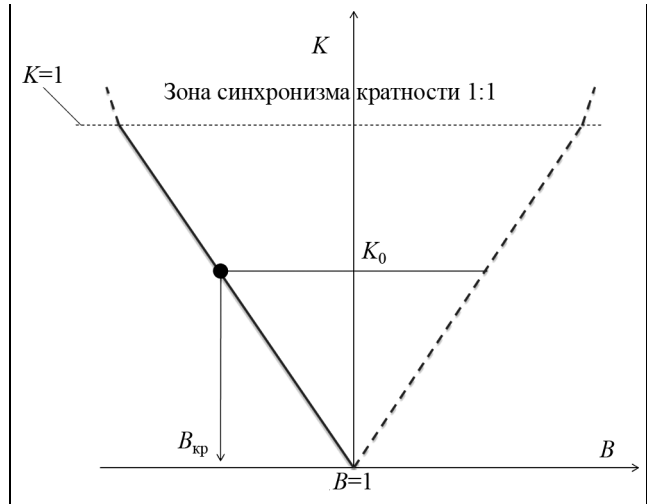


Рис. 13. На плоскости параметров (K, B) фиксируется K_0 и находится граница зоны 1:1, т. е. $B_{кр}$

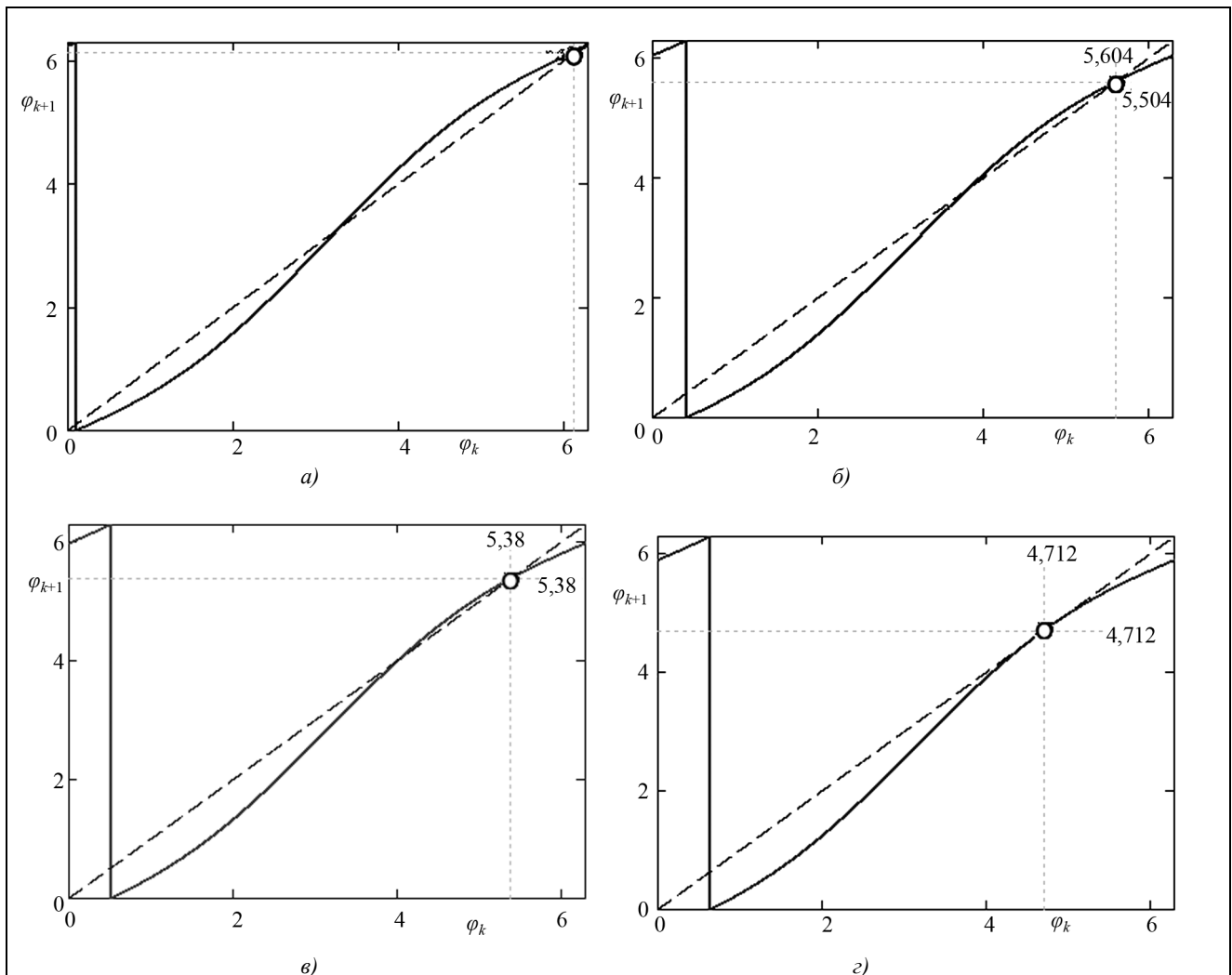


Рис. 14. «Эволюция» устойчивой неподвижной точки при изменении параметра B : 0,99 (а); 0,96 (б); 0,95(в); 0,936179 (г) – граница языка ($K = 0,4$)

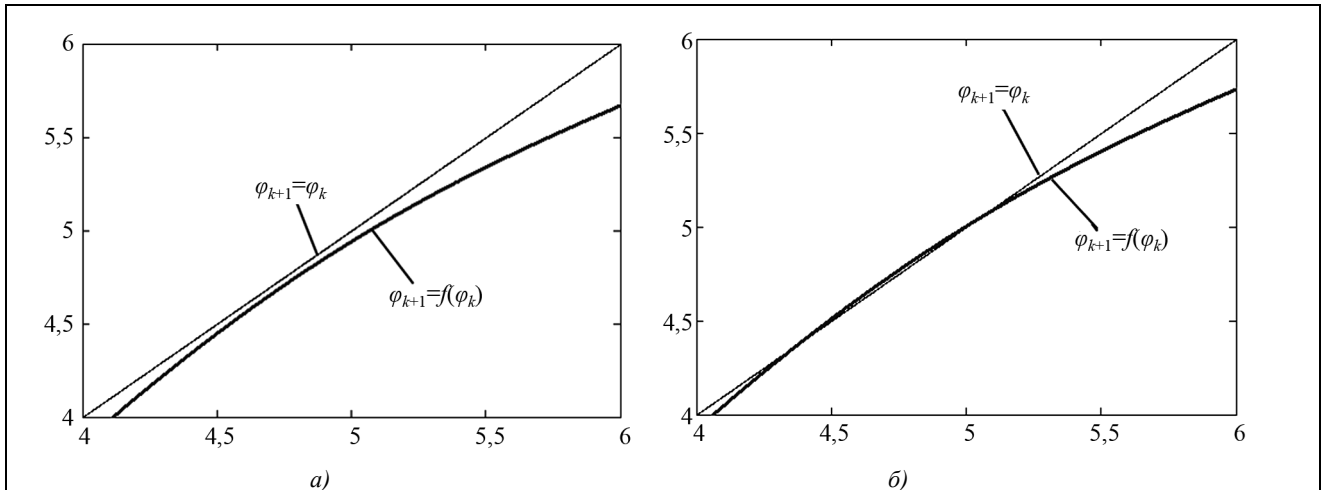


Рис. 15. Графики зависимостей $\phi_{k+1} = f(\phi_k)$ и $\phi_{k+1} = \phi_k$ при $B_{кр}^{(0)} = 0,93$ (а) и $B_{кр}^{(0)} = 0,94$ (б)

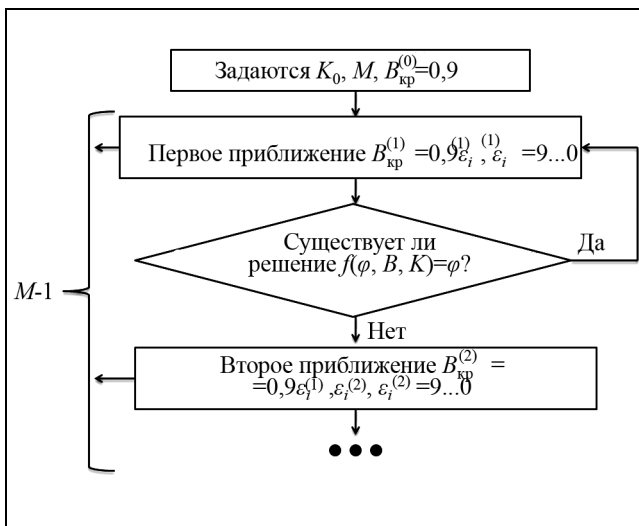


Рис. 16. Алгоритм нахождения $B_{кр}$ с любой точностью M в зоне с кратностью 1:1

$K = 0,4$. Предположим, что необходимо определить $B_{кр}$ с $M = 4$ знаками после запятой. Возьмем нулевое приближение $B_{кр}^{(0)} = 0,99$, в этом случае, как показано на рис. 14,а, устойчивая неподвижная точка существует. Уменьшим параметр $B_{кр}$ (рис. 14,б-г) до значения $B_{кр}^{(0)} = 0,93$. В этом случае графики $\phi_{k+1} = f(\phi_k)$ и $\phi_{k+1} = \phi_k$ не будут пересекаться (рис. 15,а), причем, если взять $B_{кр}^{(0)} = 0,94$, то соответствующие графики пересеклись бы (рис. 15,б). Таким образом, если бы необходимая точность была 2 знака после запятой, то граничное значение параметра $B_{кр}$ было бы 0,94. Продолжим этот процесс.

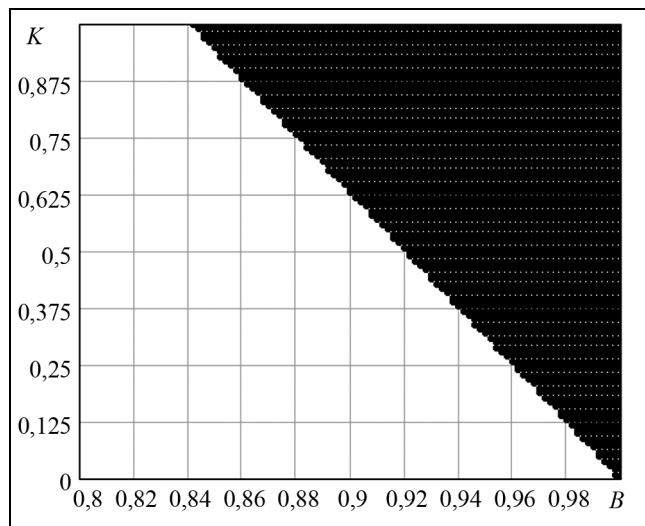


Рис. 17. Зона синхронизма с кратностью 1:1 на плоскости параметров (K, B)

Теперь будем перебирать все целые числа от 0 до 9 в третьем разряде $B_{кр}^{(0)} = 0,93$, пока «не наткнемся» на границу перехода, аналогичную рассмотренной на рис. 15. Таким образом, найдем $B_{кр}^{(1)} = 0,937$. Аналогично можно найти окончательное приближение: $B_{кр}^{(3)} = 0,93618$.

Зададимся вопросом: нельзя ли формализовать математически процедуру нахождения $B_{кр}$ для произвольного M , предложив алгоритм, работающий на компьютере? Это связано с тем, что искать для каждого разряда переход через устойчивость кропотливо. Это проблема легко решается, если вспомнить, что, по сути, ищется решение уравнения $f(\phi, B_{кр}^{(i)}, K_0) = \phi$ для текущего разряда

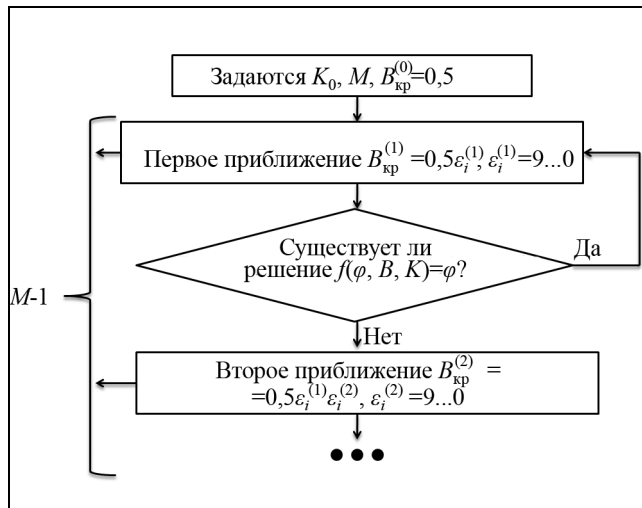


Рис. 18. Алгоритм нахождения $B_{кр}$ (правая граница) с любой точностью M в зоне с кратностью 1:2

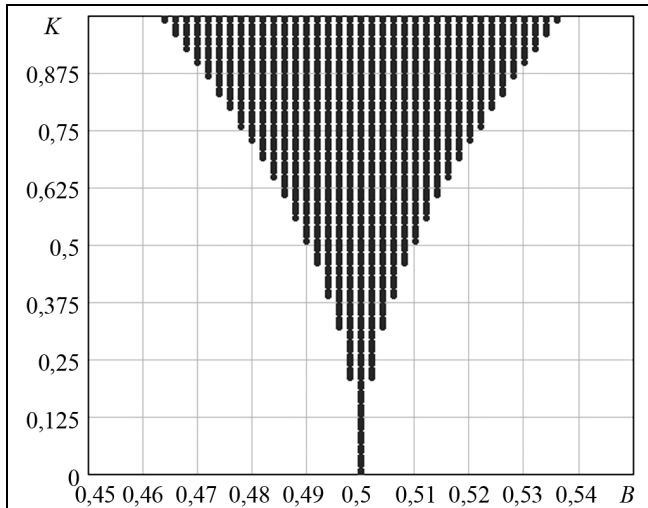


Рис. 19. Зона синхронизма с кратностью 1:2 на плоскости параметров (K, B)

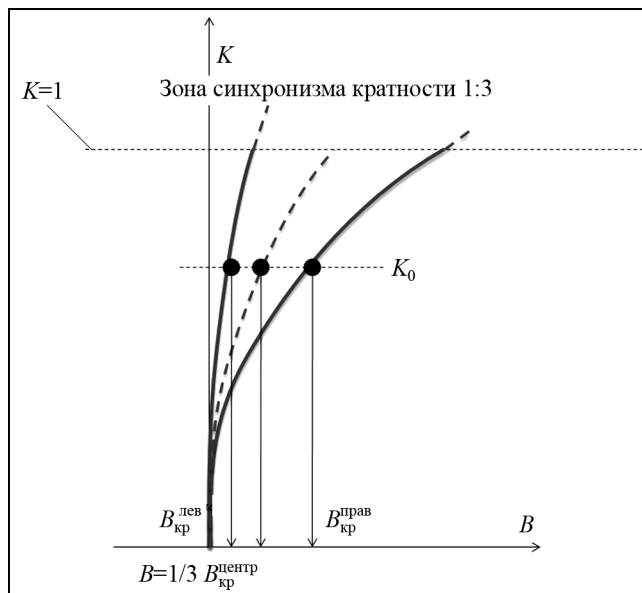


Рис. 20. На плоскости параметров (K, B) фиксируется K_0 и находятся границы зоны 1:3

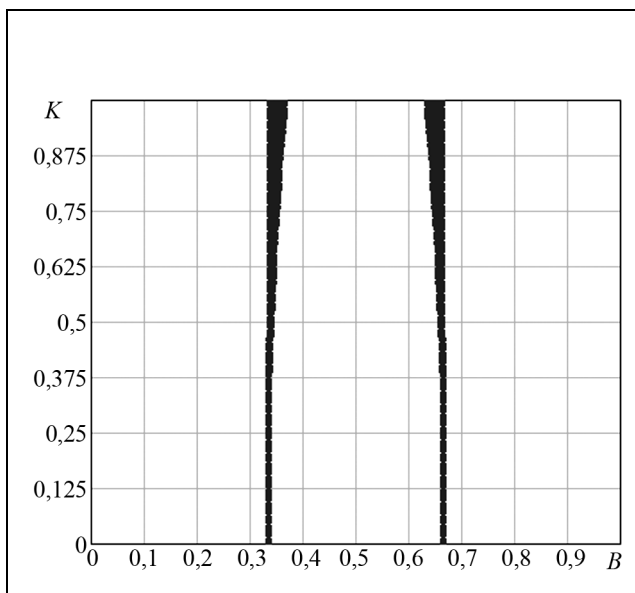


Рис. 21. Зона синхронизма с кратностью 1:3 и 2:3 на плоскости параметров (K, B)

i и на основе его существования делается вывод о том, какое число должно стоять в соответствующем разряде для данного приближения. Решать уравнение $f(\phi, B_{кр}^{(i)}, K_0) = \phi$ можно, например, методом Ньютона или любым другим [8]. В современных математических пакетах (Mathcad, Matlab, Mathematica, Maple,...) это легко сделать. Алгоритм представлен на рис. 16. На рис. 17 показана соответствующая зона синхронизма, построенная с помощью этого подхода. Отметим, что зависимость $K(B)$ можно определить из уравнения стационарного режима $\hat{\phi} = \hat{\phi} + 2\pi B - K \sin[\hat{\phi}]$. Отсю-

да следует, что кривая имеет вид прямой $K(B) = 2\pi(1 - B)$. Далее разбирается построение зон синхронных режимов большей кратности.

Определение границ зон синхронизма с кратностью 1:2

Методика определения «языка» Арнольда (зоны синхронизма) с кратностью 1:2 идейно повторяет методику определения границ зоны 1:1. Важно однако, что изучается решение не уравнения $f(\phi, B, K) = \phi$, а уравнения $g(\phi, B, K) = \phi$, где $g(\phi, B, K) = f[f(\phi, B, K), B, K]$. Поэтому алго-

ритм, рассмотренный выше, необходимо несколько модифицировать (рис. 18). Нулевое приближение, к примеру, надо брать так: $B_{кр}^{(0)} = 0,5$ (т. е. «стартовать» из центра языка). Главным отличием от кратности 1:1 является то, что в системе наступает не 1Т-цикл, а 2Т-цикл, т. е. на один период входного сигнала приходится две выборки. Найдя правую границу $B_{кр}^{прав}$, левую границу (в силу симметрии) находят так: $B_{кр}^{лев} = 0,5 - (B_{кр}^{прав} - 0,5) = 1 - B_{кр}^{прав}$. Соответствующий «язык» Арнольда, в среде Mathcad представлен на рис. 19.

На рис. 19 зоны синхронизма имеют «решетчатый» вид вследствие невысокой точности задания отсчетов. Отметим, что зависимость наиболее адекватно аппроксимирующая линию границы языка имеет вид параболы: $K(B) = 5,2\sqrt{(0,5 - B)}$. Ее можно найти точно, решая уравнение стационарного режима для повторного отображения.

На рис. 17 и 19 при определении границ зон синхронизма в случаях настройки 1:1 и 1:2 мы пользовались симметрией относительно вертикальной прямой $B = 0$, $B = 1$ и $B = 0,5$ соответственно. Отличительной особенностью зон высшей кратности (больше 2) является то, что ось симметрии является некоторой кривой линией (см. рис. 12). Поэтому важным является отыскание оси симметрии. Продемонстрируем это на примере зоны 1:3. Зоны высшей кратности рассматриваются аналогично.

Определение границ зон синхронизма с кратностью 1:3

В силу того, что ось симметрии зоны 1:3 является кривой линией, поступать так же, как в случае настройки 1:1 и 1:2 нельзя. Будем искать ось симметрии этой зоны, т. е., по сути, зависимость $K_{центр}(B)$ (рис. 20).

Для фиксированного K_0 последовательно выбирают параметры B_0, B_1, B_2, \dots и изучают решение уравнения $h(\phi, B, K) = \phi$, где $h(\phi) = f^{(3)}(\phi) = f(f(f(\phi)))$. Отметим, что начальные условия $B_{кр}^{(0)}$ при использовании этого метода можно выбрать как одинаковыми, так и разными, желательно выбирать ближе к границам соответственно слева или справа от них.

По приведенным выше методикам могут быть найдены и оси симметрии, и границы зон синхро-

низма высшей кратности (M/N). На рис. 21 приведены зоны синхронизма с кратностью 1:3 и 2:3.

Проведенные эксперименты показывают, что наиболее хорошо границы зон синхронизма кратности 1:3 аппроксимируются параболическими зависимостями (которые могут быть получены точно из решения уравнения синхронных режимов для отображения третьей итерации) вида

$$K^{лев}(B) = 23\sqrt{B-1/3},$$

$$K^{прав}(B) = 5,5\sqrt{B-1/3};$$

$$K^{центр}(B) = 10\sqrt{B-1/3}.$$

Отметим еще раз, что приведенная выше техника построения зон синхронизма годится для случая $K < 1$. Для построения зон синхронизма в более широких пределах необходимо ввести понятие числа вращения.

Мультистабильность и число вращения

При попадании в область $K > 1$ зоны различной кратности накладываются друг на друга. Области перекрытия синхронных зон – это зоны бистабильности. Явление мультистабильности проявляется в том, что изменение начального условия может привести к смене синхронного аттрактора (один тип колебаний) с одним периодом на синхронный аттрактор с другим периодом, либо синхронный режим может смениться хаотическим. Подробнее о мультистабильности можно узнать в [2, 3, 7, 8, 10].

Число вращений представляет собой среднее изменение фазы выходного сигнала на одну итерацию (выборку). Аналитически число вращения записывают так [7]:

$$W = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\phi_k - \phi_0}{k}.$$

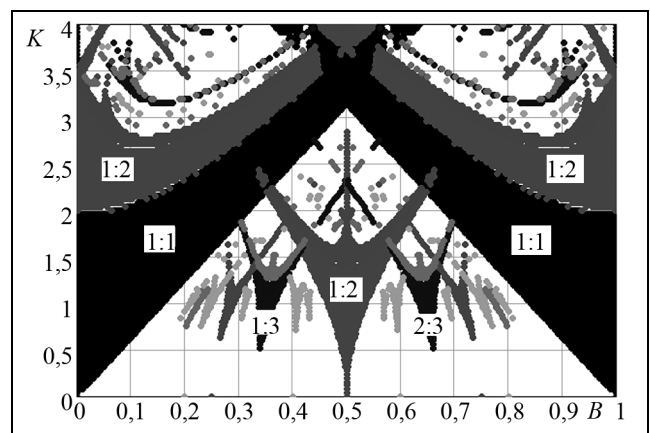


Рис. 22. Перекрытие зон синхронизма при $K < 4$

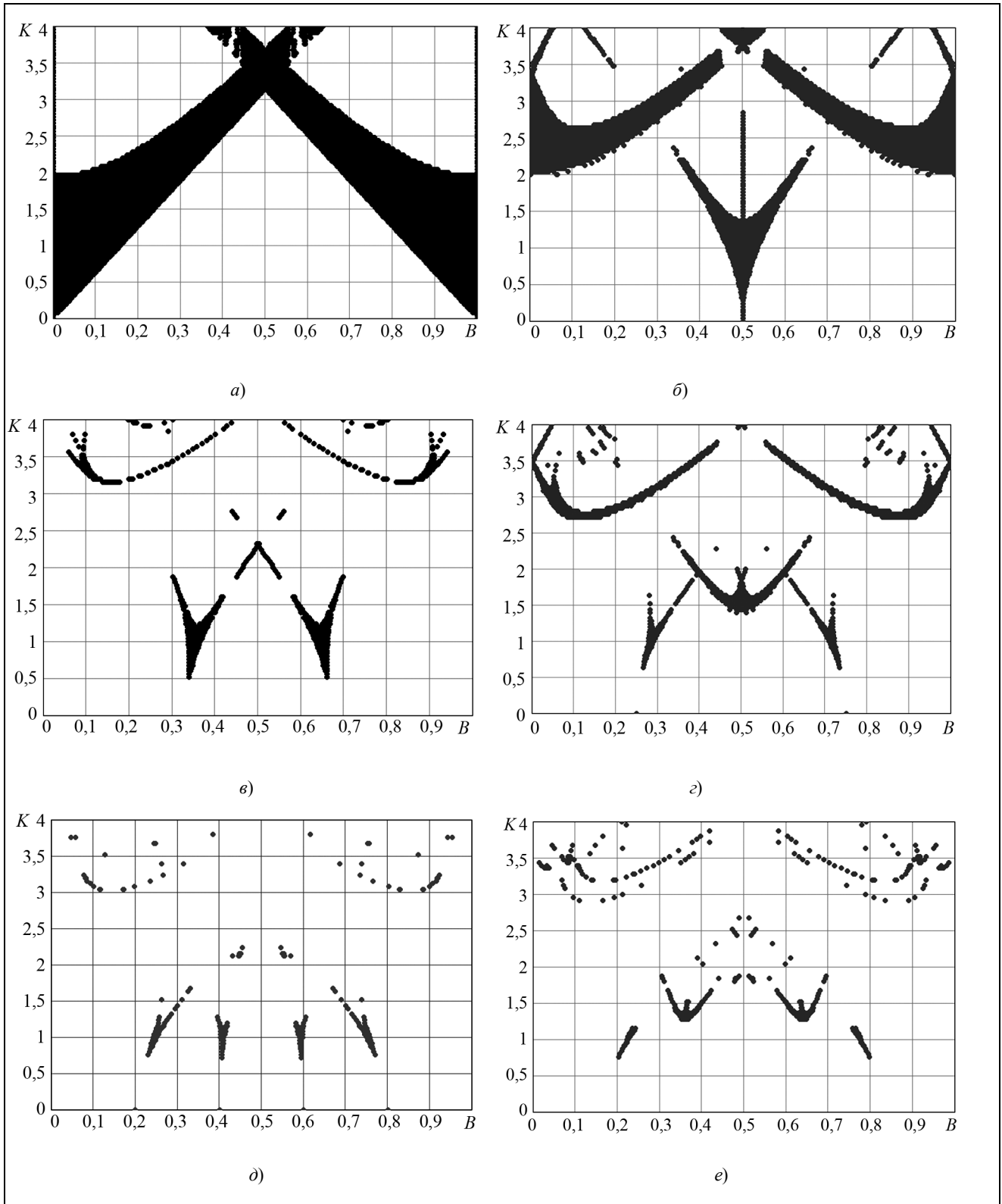


Рис. 23. Зоны синхронизма с различными NT-циклами: 1:1(а); 1:2(б); 1:3(в); 1:4(г); 1:5(д); 1,6(е)

Не вдаваясь в подробности, отметим, что для зон синхронизма кратности 1:1 число вращения равно 1, а для 1:2 – 0,5. Используя вышеприведенную формулу можно непосредственно строить зоны синхронизма различной кратности на ПК. В частности, рис. 22 и 23, *a–e* построены с использованием этого алгоритма. Рассмотрев построение карт зон синхронных режимов, исследуем влияние неоднородности в выборке входного сигнала на выходные колебания ДСФС с неравномерной выборкой.

Влияние неоднородности в выборке входного сигнала на выходные колебания ДСФС их спектры

Задачей синтеза частот является получение колебаний с нужными (номинальными) значениями частоты из исходного (опорного) сигнала путем преобразования частот, например, деления (для синтезаторов как прямого, так и непрямого синтеза; отличие заключается в том, что во втором случае выходные колебания формируются ПГ). Как было показано, ДСФС с неоднородной выборкой позволяет осуществлять подобную процедуру за счет наличия в системе выборок. Однако при неточной настройке частоты сигнала и свободных колебаний ПГ может происходить «загрязнение» спектра генерируемого колебания. Такая неточная настройка может быть связана с рядом факторов, например, чисто технологических. Как это проявляется? Рассмотрим конкретный пример. Пусть в ДСФС необходимо получить колебания с частотой $\omega_{\text{вых}}$, вдвое большей частоты входного сигнала ω_c . Из рассмотренного выше следует, что в этом случае $B = 0,5$ (т.е. на один период входного сигнала приходится одна выборка), а K желательно взять выше 0,6 (до 1) во избежание выхода за пределы зоны синхронизма кратности 1:2 (который при $K < 0,6$ является достаточно узким).

Предположим было выбрано $K = 0,9$. Пусть колебания на выходе системы синусоидальные. Временные реализации этого процесса представлены на рис. 24, *a*, где $u_c(t)$ – входное синусоидальное колебание; $u_{\text{вых}}(t)$ – выходное колебание (с вдвое большей частотой). При точной настройке $B = 0,5$ (рис. 24) сигнал на выходе системы будет иметь точно вдвое большую по сравнению с входным колебанием частоту (рис. 24, *b*). При этом период выходного колебания будет постоянен и равен некоторому значению (рис. 24, *в*). Теперь

предположим, что вследствие неточной настройки не получилось «встать» точно в центр зоны синхронизма 1:2 и значение B на практике получилось равным 0,53. На рис. 25 представлены входное и выходное синусоидальные колебания (рис. 25, *a, б*), а также период выходного колебания (рис. 25, *в*) от времени. В частности из рис. 25, *в* видно, что отсчеты располагаются неравномерно на оси времени и текущее значение периода меняется, «перескакивая» с большего на меньшее значение. Здесь и проявляется эффект неравномерности выборки.

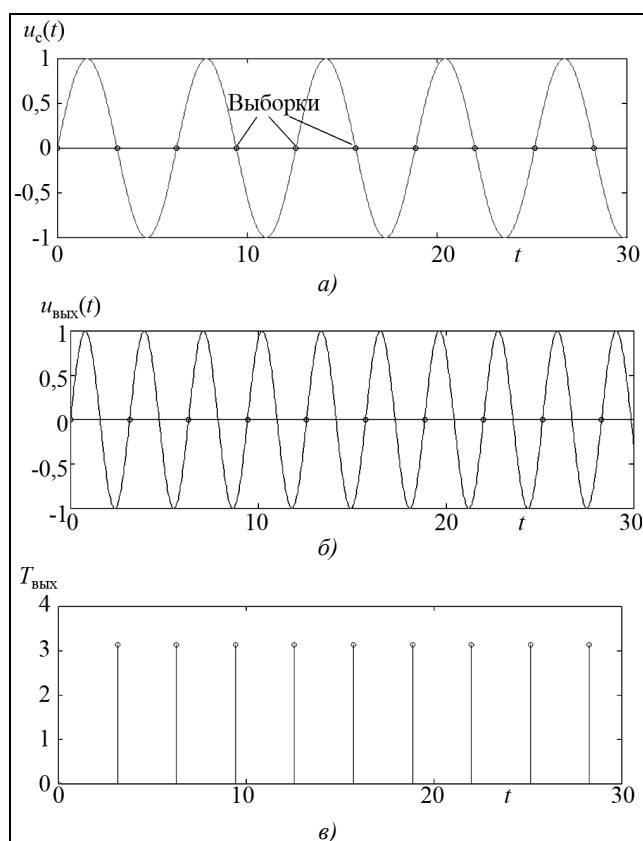


Рис. 24. Входной сигнал (*a*), выходное колебание (*б*) и период выходного колебания (*в*) при точной настройке $B = 0,5$

Посмотрим, как эта неравномерность скажется на спектре выходного колебания. На рис. 26, *a* представлены спектры входного и выходного сигналов при точной настройке. Очевидно, что при точной настройке спектр выходного сигнала будет иметь вид δ -функции, сдвинутой относительно начала координат на $2f_c$. При наличии же расстройки спектр выходного сигнала будет загрязняться дополнительной спектральной составляющей, которая будет присутствовать на частоте сигнала f_c .

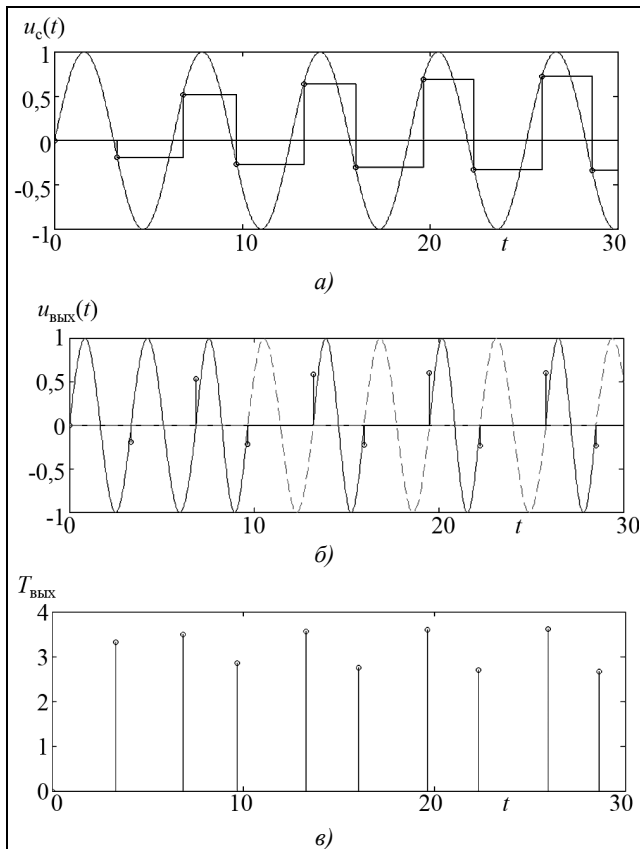


Рис. 25. Входной сигнал (а), выходное колебание (б) и период выходного колебания (в) при неточной настройке $B = 0,53$

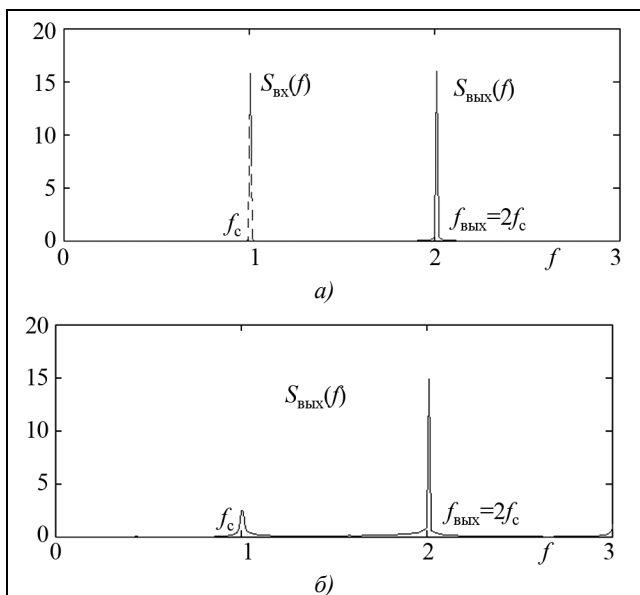


Рис. 26. Спектр входного и выходного сигналов при точной настройке $B = 0,5$ (а) и при наличии рассогласования частот синхронизируемых колебаний $B = 0,53$ (б)

Аналогичную ситуацию можно проследить и в зонах высшей кратности (1:3, 1:4, ...). При неточной настройке (см. рис. 24,в,г и 25,б) спектр выходного

сигнала содержит паразитные составляющие на комбинационных частотах $f_c, 2f_c, 4f_c, \dots$.

В случае идеальной настройки (которая теоретически возможна только при достаточно малом коэффициенте усиления, не представляющем пользы для практики в силу малой зоны синхронизма) имеем составляющую только на основной частоте $3f_c$. Проведем более подробное изучение спектров выходных колебаний ДСФС с неравномерной выборкой.

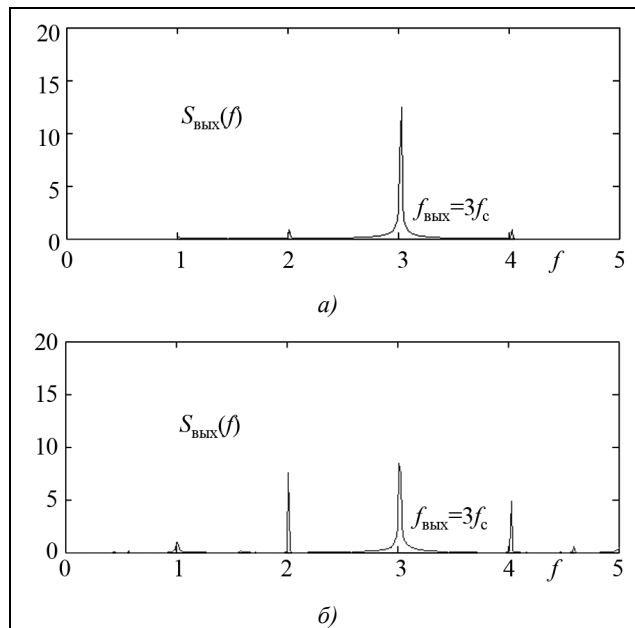


Рис. 27. Спектры выходных колебаний при точной настройке (а – настройка 1:3) и равномерной выборке, а также при наличии расстройки (б – не точно 1:3) и соответственно неравномерной выборке

Спектры колебаний для зон кратности 1:1 и 1:2: случай синусоидального выходного сигнала

Зададимся вопросом: будет ли проявляться неравномерность выборки в зоне с кратностью 1:1? Из предыдущих разделов известно, что в пределах изучаемой зоны существует одна устойчивая неподвижная точка (случай $B=1$, в котором были определены две неподвижные точки 0 и 2π , считаем исключением). Пример соответствующих диаграммы Ламерея – Кенигса и временной реализации в пределах зоны 1:1 приведен на рис. 28.

После переходного процесса происходит синхронизация, причем так, что наступает 1Т-цикл (на один период сигнала попадает 1 выборка) и в этом случае (начиная с некоторого n) $\phi_n = \phi_{n+1} = \phi_{n+2} = \hat{\phi}$. Получается, что разность фаз $\Delta\phi = \phi_{n+1} - \phi_n$ равняет-

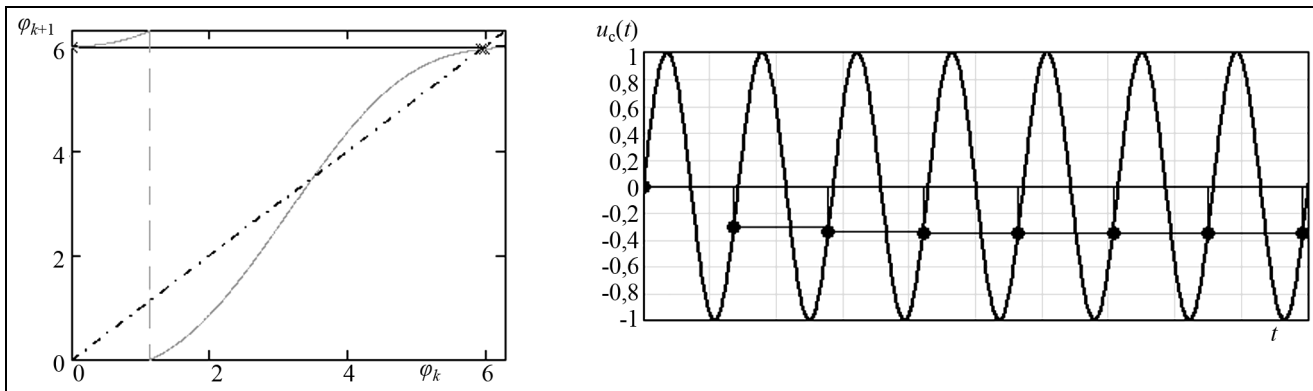


Рис. 28. Диаграммы Ламерея–Кенигса и временные реализации в пределах зоны с кратностью 1:1 при $B = 0,95$ и $K = 0,9$

ся нулю, или, что то же самое, 2π . Таким образом происходит точная настройка на частоту входного сигнала (нет неоднородности). Следовательно, неоднородность проявляется только в зонах высшей (большей 1) кратности.

На рис. 29 представлены спектры выходных колебаний в центре зоны синхронизма кратности 1:1 и на границе. Вследствие отсутствия неоднородности в выборке входного сигнала спектр получился «чистым» и при подходе к границе зоны. Более того мощность полезной спектральной компоненты не меняется по сечению зоны 1:1.

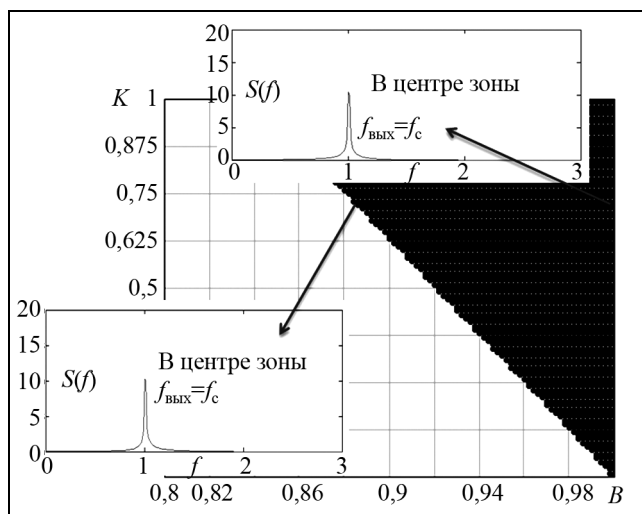


Рис. 29. Спектры выходного сигнала в центре зоны синхронизма 1:1 и на границе (неоднородность отсутствует – спектр «чистый»)

Рассмотрим случай настройки 1:2. Из предыдущих разделов следует, что в центре зоны синхронизма 1:2 при $0 < K < 1$ выборка входного сигнала равномерна. Следовательно, для выходного синусоидального сигнала спектр будет иметь одну спектральную составляющую (δ -функцию) на частоте $f_{\text{вых}} = 2f_c$ (рис. 30).

Теперь, зафиксировав некоторое значение K_0 , будем двигаться к границе зоны, наблюдая за изменением спектра и характера колебаний на выходе. На рис. 31 изображены входной и выходной сигналы на границе зоны 1:2 при $K_0 = 0,9$, а также текущий период выходного сигнала. При наличии расстройки спектр выходного сигнала будет меняться (рис. 32). Основная составляющая уменьшается, а боковые (паразитные составляющие) растут. На рис. 33 показана «эволюция» спектров от центра зоны синхронизма 1:2 к границе. Из него видно, как постепенно начинают расти боковые составляющие и как «загрязняется» спектр. Таким образом (рис. 34) строятся зависимости спектральных составляющих (главной и побочных) от величин расстройки относительно центра зоны. Такую же процедуру можно проделать для всех уровней максимальной девиации фазы и получить рис. 35, на котором на плоскости параметров (K, B) показано поведение основной (рис. 35,а) и побочной (рис. 35,б) спектральных составляющих.

Итак, было показано, что наличие неравномерности в выборке входного сигнала ведет к «загрязнению» спектра сигнала на выходе. Отметим, что все графики, построенные на рис. 29, 33–35, были выполнены в среде Mathcad 14 с использованием стандартных операций БПФ. После подробного изучения случая синхронизма 1:2 перейдем к исследованию спектров высших кратностей на примере 1:3.

Спектры колебаний для зон высших кратностей: случай синусоидального выходного сигнала

Выше исследовалось построение границы зоны синхронизма 1:3 (и высшей кратности) и было показано, что соответствующий «язык» Арнольда

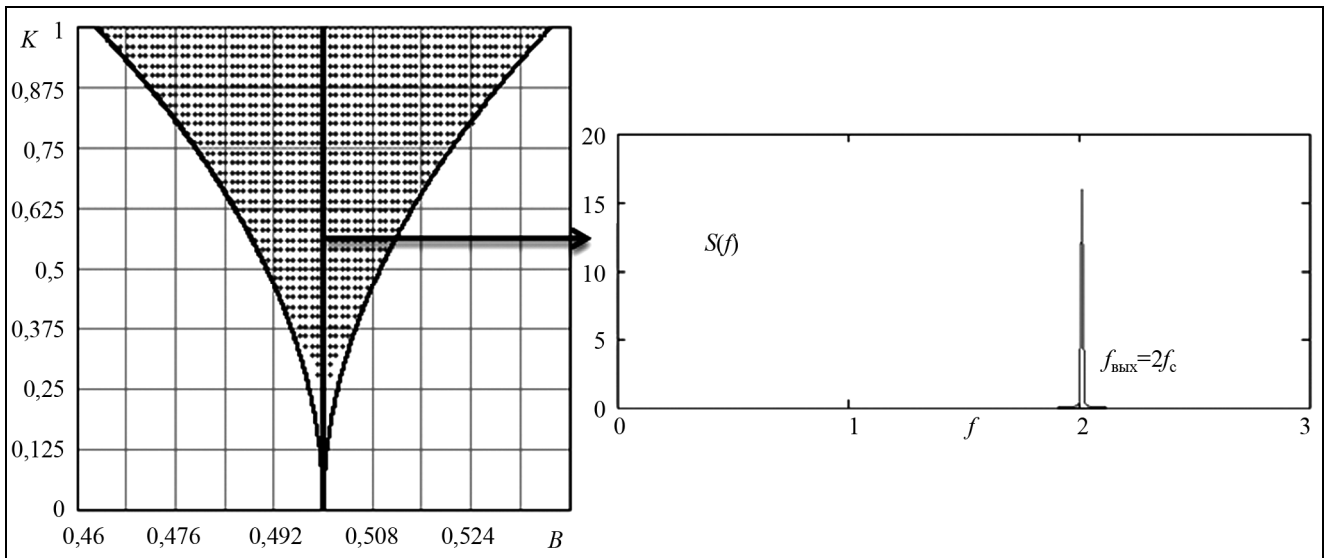


Рис. 30. Спектры выходного сигнала в центре зоны синхронизма 1:2 (равномерная выборка наблюдается для любого K в центре зоны)

при подходе к $K = 1$ достаточно сильно искривляется. Были найдены кривые, аппроксимирующие поведение границ зоны синхронизма и неvertи-кальной оси симметрии. Возникает вопрос: существует ли на оси симметрии равномерная выборка входного сигнала? Ответ оказывается отрицательным почти на всем интервале $0 < K < 1$. Для сравнительно небольших значений параметра K (до 0,1–0,15) зона синхронизма еще не искривлена и выборки будут идти почти равномерно (рис. 36), а следовательно, спектр выходного сигнала будет «чистым». Однако при увеличении K до 1 спектр будет приобретать составляющие на комбинационных частотах: $f_c, 2f_c, \dots$. Вычисления показывают (рис. 37), что на оси симметрии две выборки из трех будут идти равномерно друг относительно друга, а оставшаяся выборка придет через меньшее время.

Таким образом, «эволюция» спектров выходного сигнала на оси симметрии следующая. При небольших значениях K (до примерно 0,15) выборки входного сигнала идут почти равномерно при условии, что управляющие параметры располагаются на оси симметрии зоны синхронизма 1:3. Далее эта ось начинает «искривляться» и у одной выборки период начинает сокращаться при одновременном увеличении периодов двух других. Причем этот рост происходит пропорционально так, что на оси симметрии зоны 1:3 период следования двух выборок будет одинаковым в отличие от третьего. Однако спектр выходного сигнала бу-

дет «загрязнен» паразитными компонентами и в этом случае. Характер разрушения спектра выходного сигнала при подходе к границам зоны синхронизма 1:3 показан на рис. 38.

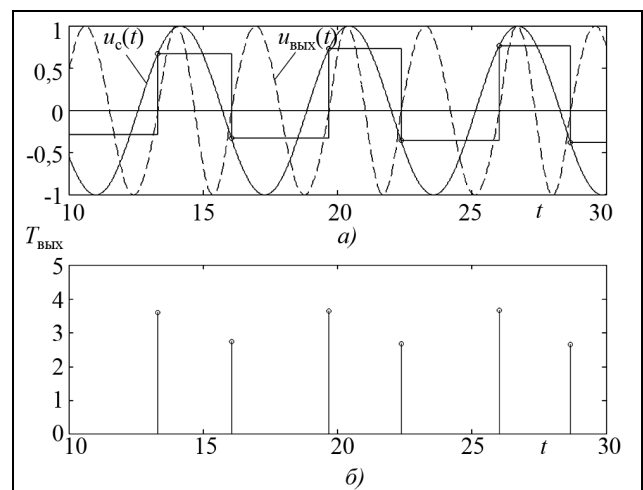


Рис. 31. Входной и выходной сигналы системы (а) на границе зоны синхронизма с кратностью 1:2 при $K_0 = 0,9$ и период выходного сигнала (б)

Характер «разрушения» спектра (рис. 38) по сути такой же, как и при настройке 1:2: при подходе к границам боковые составляющие все более возрастают, а основные составляющие (в данном случае относительно оси симметрии их несколько, т. е. выходной сигнал уже имеет побочные компоненты) падают.

Подведем некоторые итоги. Для достаточно небольших значений параметра K можно добиться

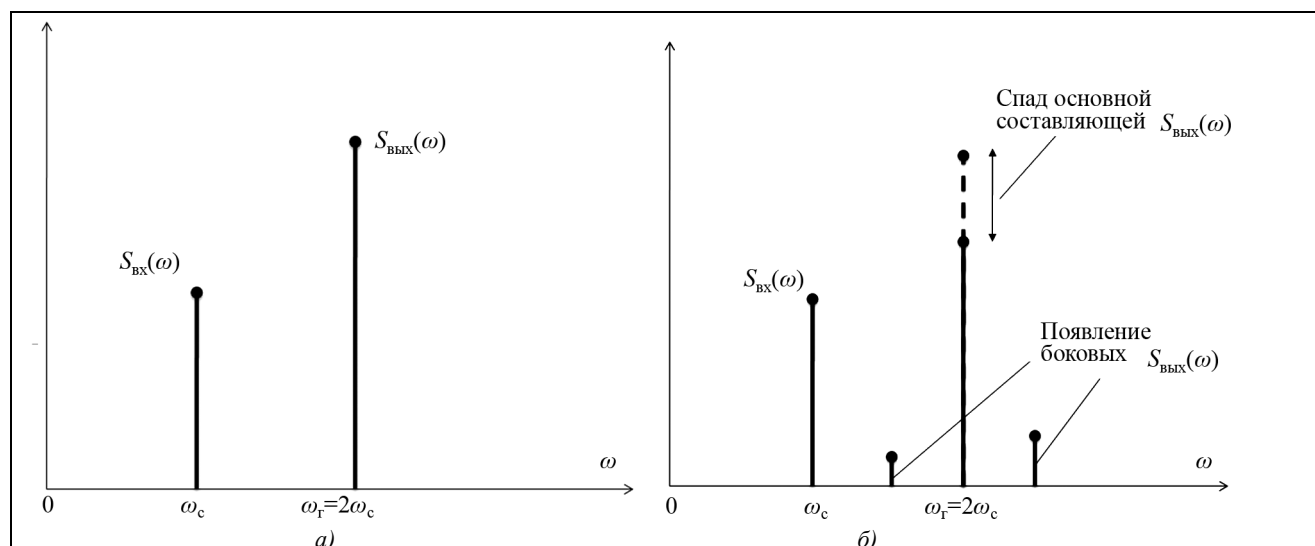


Рис. 32. Спектр выходного сигнала в отсутствии расстройки (а) и при ее наличии (б)

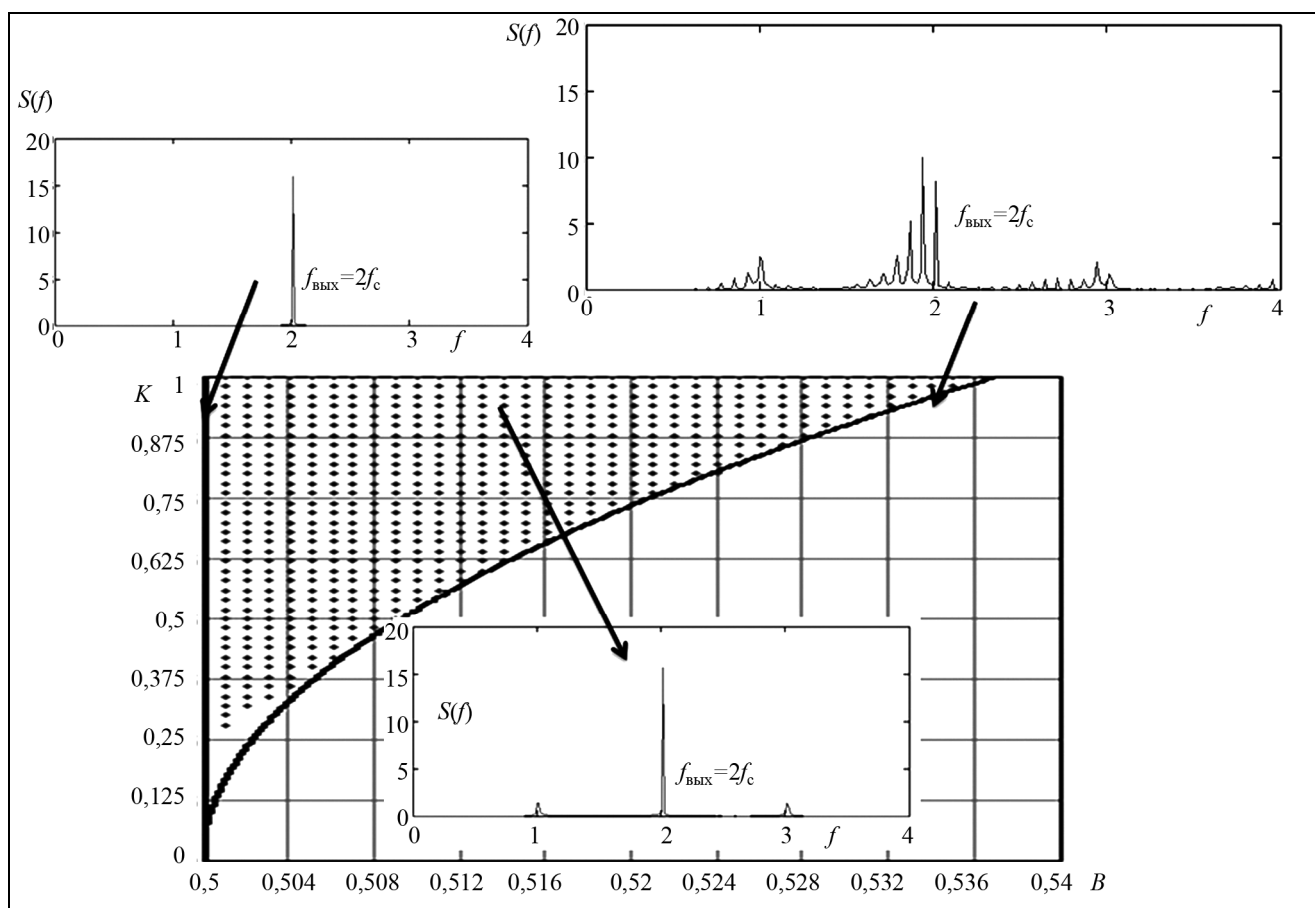


Рис. 33. Спектры выходного сигнала при движении к границе зоны синхронизма

почти равномерной выборки входного сигнала на оси симметрии зоны синхронизма 1:3, однако при повышении K эта ось начинает «искривляться» и интервал прихода одного из синхроимпульсов к

ИФД становится меньше двух остальных (при пропорциональном изменении последних). Это ведет к «загрязнению» спектра выходного сигнала паразитными составляющими на комбинационных час-

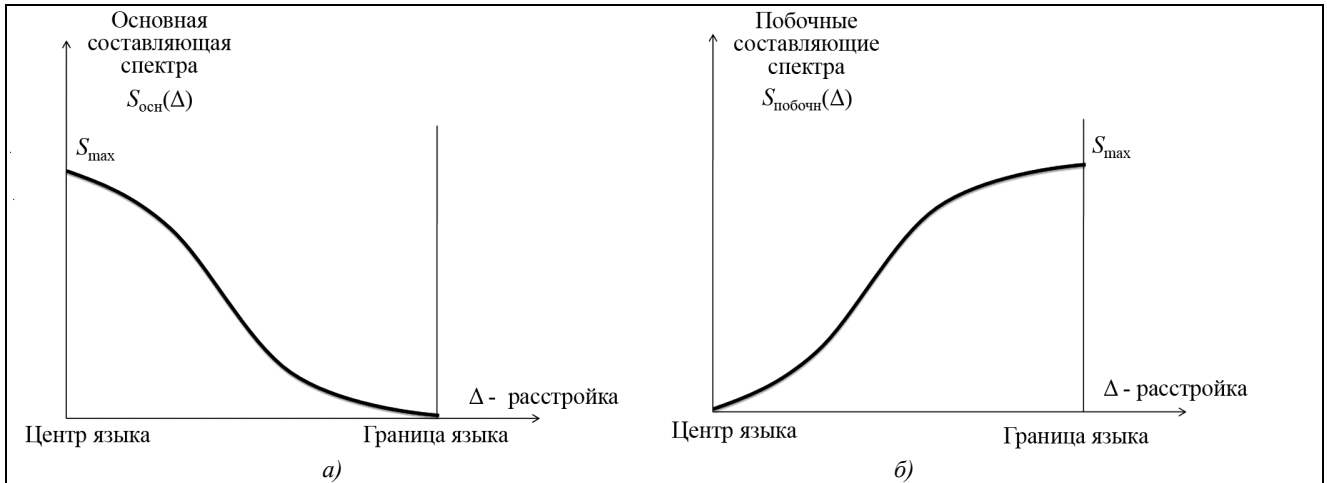


Рис. 34. Зависимости основной (а) и побочных (б) спектральных составляющих от величины расстройки относительно центра зоны, нормированные на величину S_{\max} .

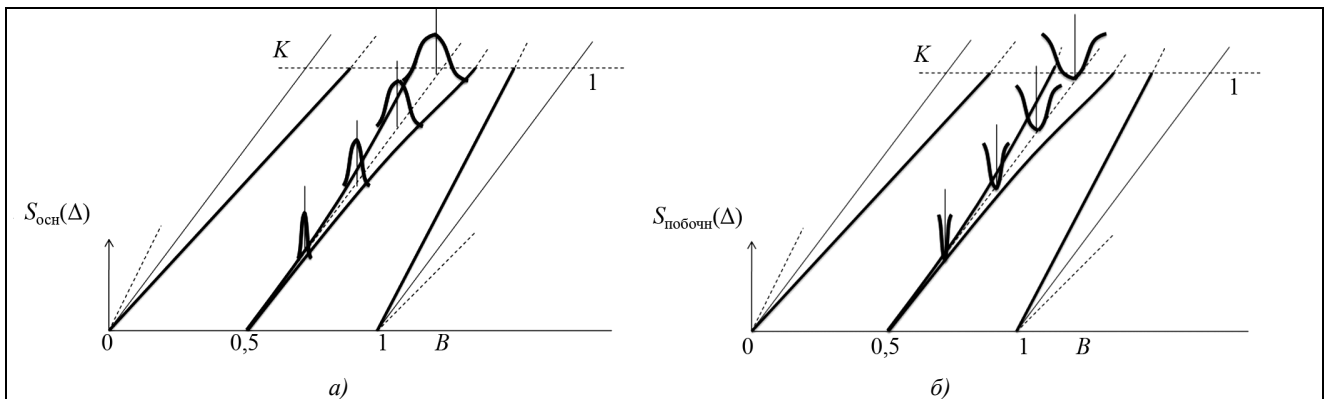


Рис. 35. Зависимости основной (а) и побочных (б) спектральных составляющих на плоскости параметров (K, B)

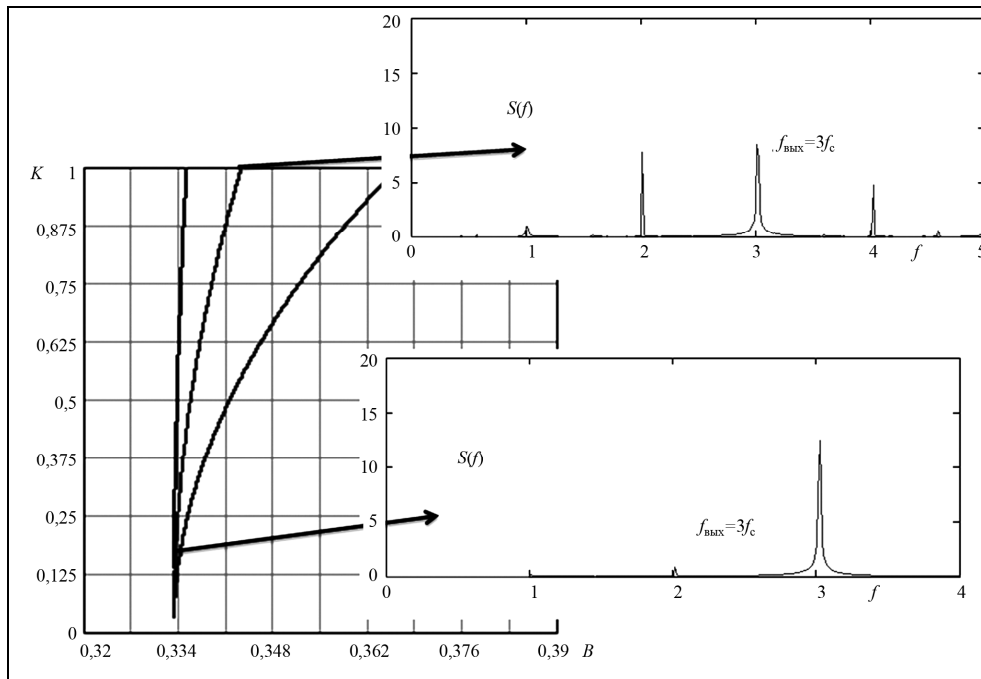


Рис. 36. Спектры выходных сигналов на оси симметрии зоны синхронизма 1:3

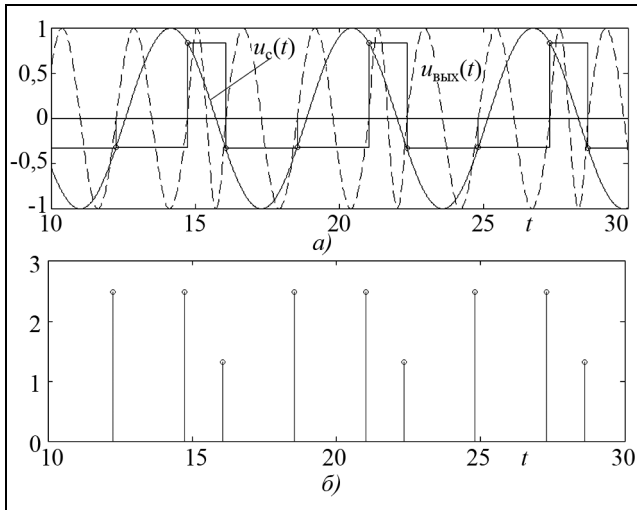


Рис. 37. Входной и выходной (а) сигналы ДСФС с настройкой 1:3 при $K \approx 1$, а также текущий период выходного сигнала (б) от времени

тогах. Отметим, однако, что две из трех выборок будут приходить равномерно к ИФД. При подходе же к границе зоны синхронизма 1:3 спектр выходного сигнала полностью разрушается: уровень побочных компонент в спектре становится все больше. И при выходе из зоны может наступить асинхронный режим. Аналогичная ситуация наблюдается и для зон высшей кратности.

Спектры колебаний в зонах произвольной кратности: случай выходного сигнала, состоящего из последовательности прямоугольных импульсов

Выше изучалось влияние расстройки на спектр выходного гармонического сигнала. В данном разделе рассматривается спектр выходного сигнала, состоящего из множества прямоугольных импульсов, идущих с периодом, который находится из выражения (4). Пока будем интересоваться настройкой 1:2.

За основу возьмем периодический сигнал $v(t)$, имеющий период T_c и соответственно частоту $\omega_c = 2\pi/T_c$. Разложение в комплексный ряд Фурье определяется так:

$$v(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_c t} \tag{9}$$

Здесь коэффициенты разложения находим, как

$$c_n = \frac{1}{T_c} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} v(t) e^{-jn\omega_c t} dt \tag{10}$$

Синхронизирующие импульсы $v(t)$ представляют собой последовательность прямоуголь-

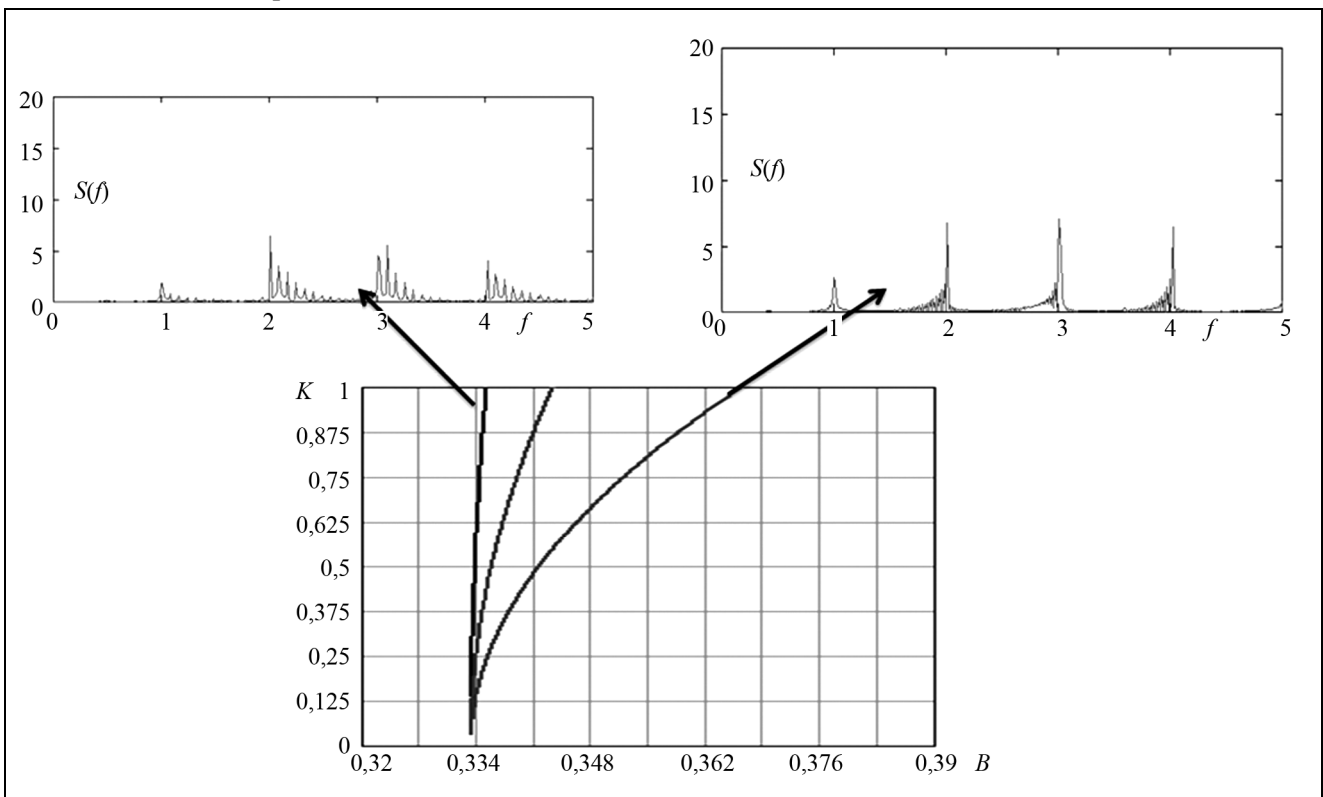


Рис. 38. Спектры выходных сигналов на границах зоны синхронизма 1:3 при $K \approx 1$

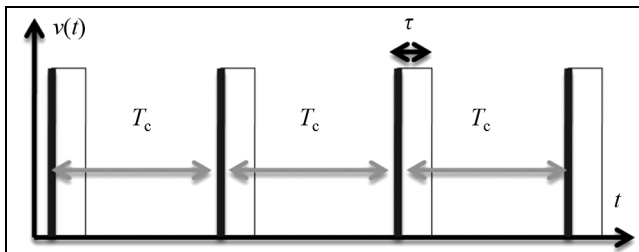


Рис. 39. Периодическая последовательность прямоугольных импульсов

ных импульсов длительностью τ (рис. 39). Найдем в этом случае коэффициенты c_n разложения в ряд Фурье. Из (10) находим

$$\begin{aligned}
 c_n &= \frac{1}{T_c} \int_{-T_c/2}^{T_c/2} v(t) e^{-jn\omega_c t} dt = \\
 &= \frac{1}{T_c} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} U_0 e^{-jn\omega_c t} dt = \\
 &= \frac{U_0}{jT_c n \omega_c} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} e^{-jn\omega_c t} d(jt n \omega_c) = \\
 &= \frac{U_0}{jT_c n \omega_c} \left(e^{-jn\omega_c \frac{\tau}{2}} - e^{jn\omega_c \frac{\tau}{2}} \right) = \\
 &= \frac{U_0 \tau}{T_c} \frac{\left(e^{jn\omega_c \frac{\tau}{2}} - e^{-jn\omega_c \frac{\tau}{2}} \right)}{2jn\omega_c \frac{\tau}{2}} = \frac{U_0 \tau}{T_c} \frac{\sin\left(n\omega_c \frac{\tau}{2}\right)}{n\omega_c \frac{\tau}{2}} = \\
 &= \frac{U_0 \tau}{T_c} \text{sinc}\left(n\omega_c \frac{\tau}{2}\right). \tag{11}
 \end{aligned}$$

Спектр (11) представлен на рис. 40 на достаточно большом (рис. 40,а) и узком (рис. 40,б) интервалах дискретных частот n . Очевидно, что для импульсов, идущих с частотой, вдвое большей, чем ω_c , спектр c_n будет иметь вид (рис. 41)

$$c_n = \frac{2U_0 \tau}{T_c} \text{sinc}\left(2n\omega_c \frac{\tau}{2}\right). \tag{12}$$

Найдем теперь спектр сигнала, имеющего расстройку Δ , как показано на рис. 42,а. Его можно представить (рис. 42,б) как сумму двух сигналов, имеющих равные периоды T_c , но сдвинутых друг относительно друга на $T_c/2 + \Delta$. Далее для удобства обозначим через Δ_1 сдвиг фазы сигнала $v_0(t)$ относительно начала координат и Δ_2 – сдвиг фазы сигнала $v_1(t)$ относительно начала координат. Тогда выполняется соотношение

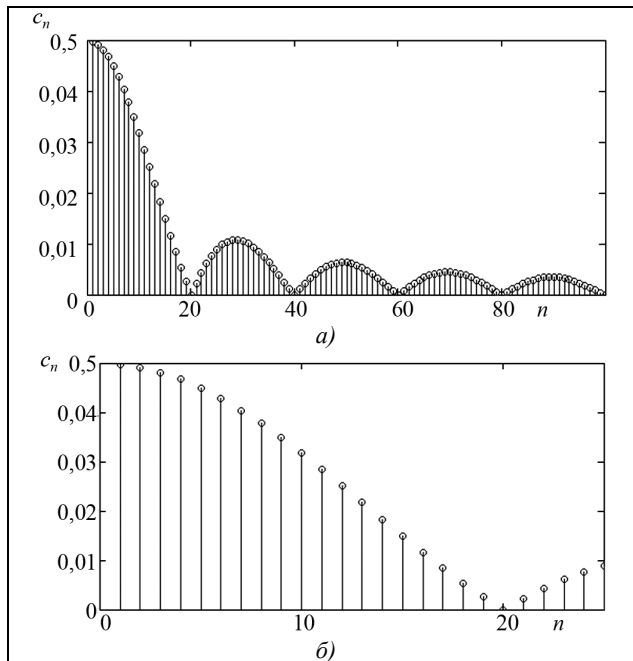


Рис. 40. Спектр периодической последовательности импульсов на достаточно широком (а) и узком (б) интервале частот n

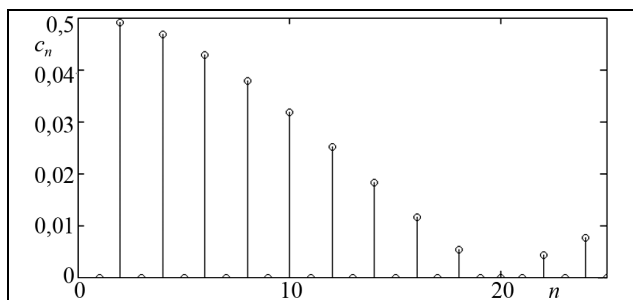


Рис. 41. Спектр периодической последовательности импульсов в случае, когда период следования равен $T_c/2$

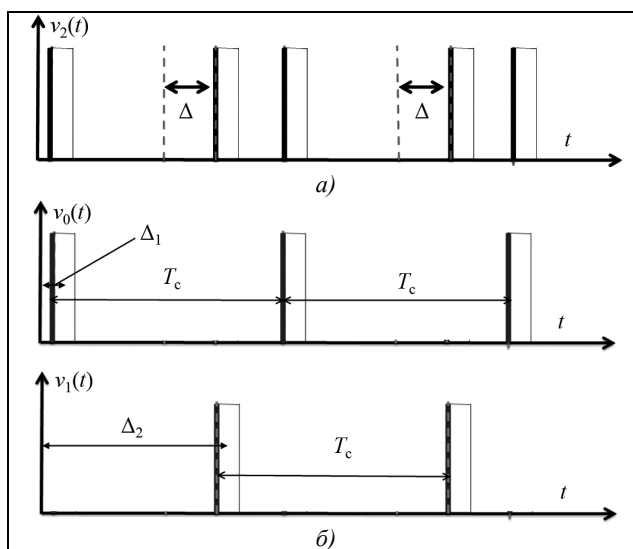


Рис. 42. Периодическая последовательность импульсов при наличии расстройки Δ (а) и представление его в виде суммы двух колебаний с одинаковым периодом (б)

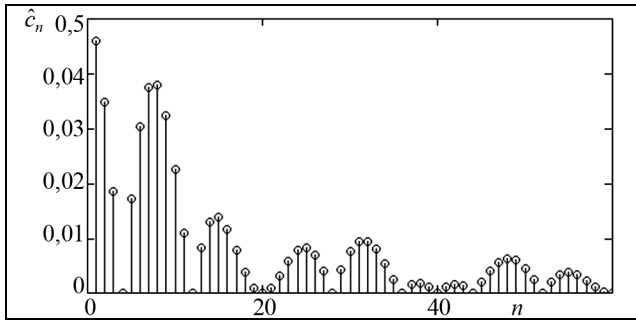


Рис. 43. Спектр сигнала в случае расстройки $\Delta = T_c/4$

$$T_c/2 + \Delta = \Delta_2 - \Delta_1. \tag{13}$$

С учетом (13) и свойств преобразований Фурье запишем спектр сигнала $v_0(t)$ в виде

$$c_n^1 = \frac{2U_0\tau}{T_c} \text{sinc}\left(2n\omega_c \frac{\tau}{2}\right) e^{-jn\omega_c\Delta_1}. \tag{14}$$

Аналогично запишем спектр сигнала $v_1(t)$

$$c_n^2 = \frac{2U_0\tau}{T_c} \text{sinc}\left(2n\omega_c \frac{\tau}{2}\right) e^{-jn\omega_c\Delta_2}. \tag{15}$$

Так как $v_2(t) = v_0(t) + v_1(t)$, спектр \hat{c}_n сигнала $v_2(t)$

$$\hat{c}_n = c_n^1 + c_n^2. \tag{16}$$

С учетом (14) и (15) перепишем (16):

$$\begin{aligned} \hat{c}_n &= c_n^1 + c_n^2 = c_n \left(e^{-jn\omega_c\Delta_1} + e^{-jn\omega_c\Delta_2} \right) = \\ &= 2c_n e^{-jn\omega_c\left(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right)} \left(\frac{e^{-jn\omega_c\left(\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}\right)} + e^{jn\omega_c\left(\frac{\Delta_1-\Delta_2}{2}\right)}}{2} \right) = \\ &= 2c_n e^{-jn\omega_c\left(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right)} \cos\left(n\omega_c\left(\frac{\Delta_2-\Delta_1}{2}\right)\right), \end{aligned} \tag{17}$$

или с учетом соотношения (13)

$$\hat{c}_n = 2c_n e^{-jn\omega_c\left(\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}\right)} \cos\left(n\omega_c\left(\frac{T_c}{4} + \frac{\Delta}{2}\right)\right). \tag{18}$$

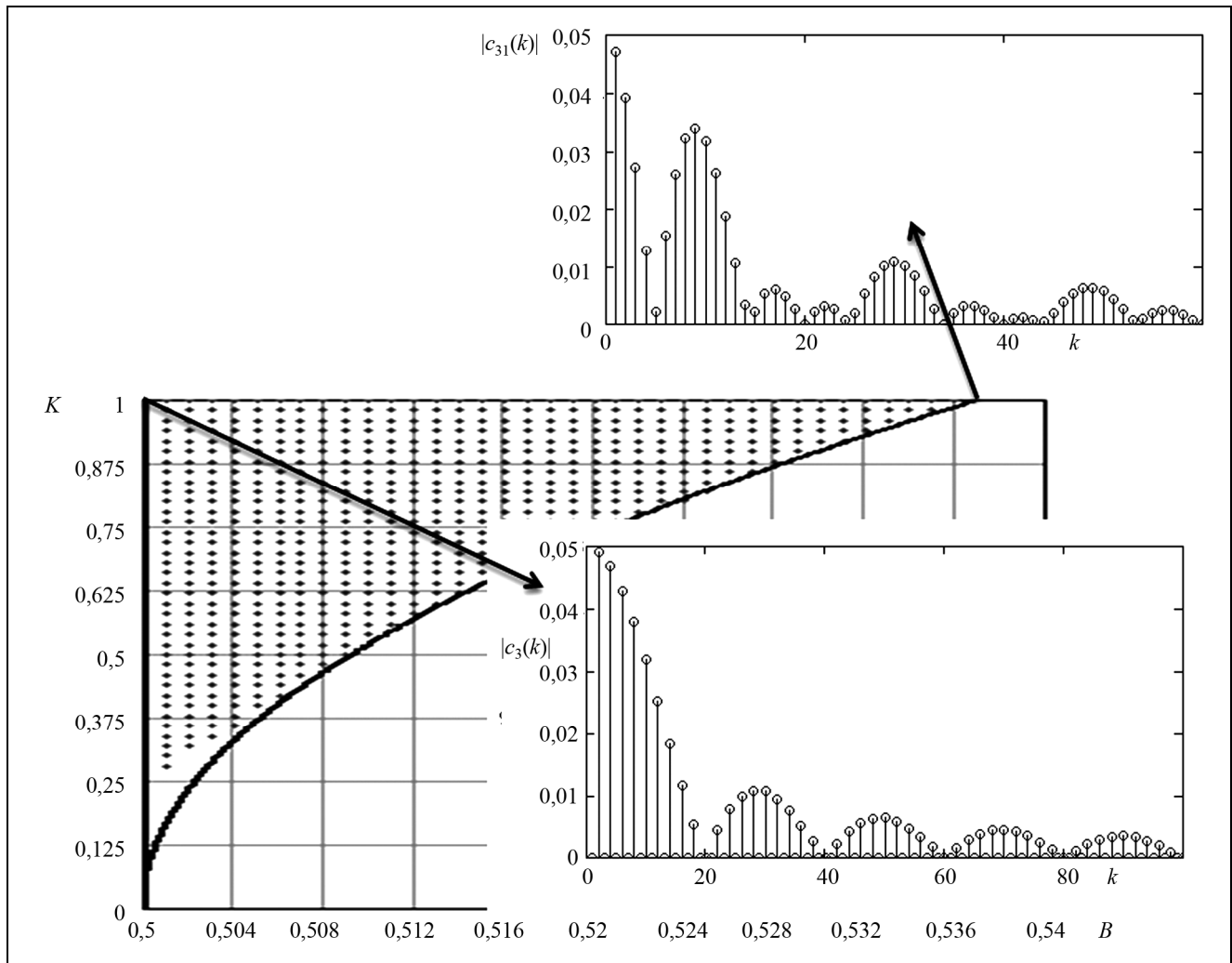


Рис. 44. Спектры сигнала состоящего из последовательности прямоугольных импульсов при подходе к границе зоны синхронизма 1:2

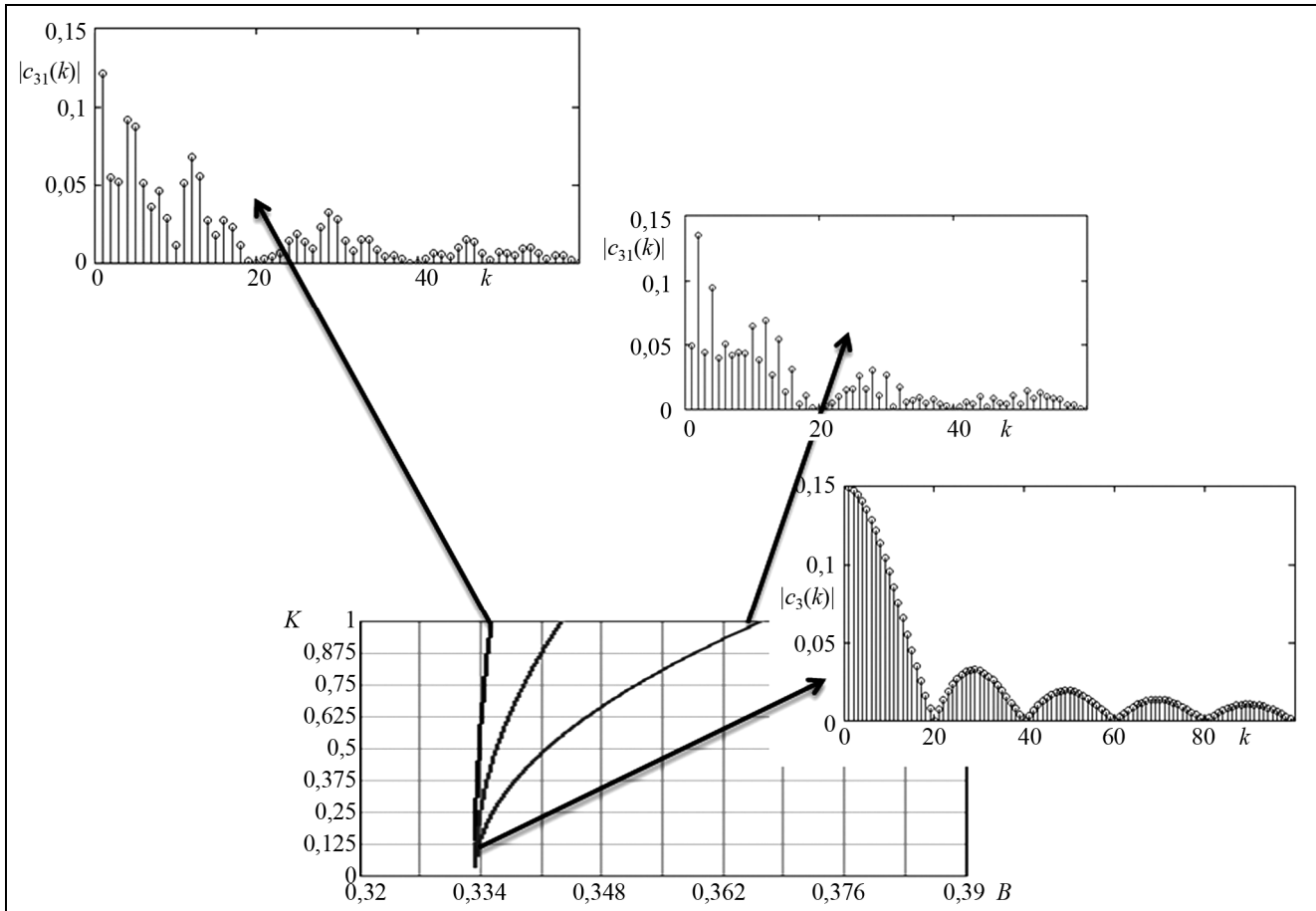


Рис. 45. Спектры сигнала, состоящего из последовательности прямоугольных импульсов на границах зон синхронизма 1:3

Проанализируем выражения (17) и (18). Если обе расстройки Δ_1 и Δ_2 равны нулю, то импульсы следуют с одной и той же частотой и, следовательно, $\hat{c}_n = 2c_n$. Зафиксируем $\Delta_1 = 0$, а $\Delta_2 = \frac{T_c}{2}$. Тогда $n\omega_c \left(\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \right) = n\omega_c \frac{T_c}{4} = n \frac{2\pi T_c}{T_c} \frac{1}{4} = \frac{n\pi}{2}$. Отсюда следует, что при нечетном n $\hat{c}_n = 0$, а при четном n имеет место ситуация, рассмотренная ранее (рис. 40, 41). Для исследования спектров в ДСФС с неоднородной выборкой нас будет интересовать некоторая промежуточная расстройка Δ . Например, при $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = \frac{3T_c}{4}$ получаем $n\omega_c \left(\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{2} \right) = \frac{3n\pi}{4}$ и $\Delta = T_c/4$. Спектр такого сигнала изображен на рис. 43. Как можно заметить, из рис. 43 спектр импульсов, имеющих расстройку $\Delta = T_c/4$, «искажен» по сравнению со спектрами с $\Delta = 0$ и с $\Delta = T_c/2$ (ср. с рис. 40 и 41).

Изменение спектра рассматриваемого сигнала в пределах зоны синхронизма 1:2 при подходе к границе представлено на рис. 44, из которого можно сделать вывод о том, что спектр заметно разрушается при подходе к границе зоны 1:2. Для зоны произвольной кратности выражение (17) представляется в виде

$$\hat{c}_n = \sum_{k=1}^K c_n^k = c_n \left(\sum_{k=1}^K e^{-jn\omega_c \Delta_k} \right). \quad (19)$$

Здесь K – порядок кратности (для 1:2 $K = 2$, для 1:3 – $K = 3$ и т. д.); Δ_k – расстройки импульсов по фазе относительно начала координат.

В частном случае для зоны 1:3 наблюдается ситуация, представленная на рис. 45. Отсюда следует, что, как и для случая синусоидального выходного сигнала, спектр достаточно сильно разрушается при подходе к границе «языков». Новым результатом здесь является то, что нули спектра сигнала на границе зоны располагаются существенно неравномерно на оси частот, что связано с «интерференцией»

двух косинусов в формуле (18) (один из них заключен в c_n). Аналогичная ситуация наблюдается и для настроек высшей кратности.

Выводы

Показано, что в дискретной системе фазовой синхронизации с неравномерной выборкой возможно получение колебаний с дробно-рациональным значением частот на выходе без введения специальных устройств типа делителей частот. При наличии расогласования частот синхронизируемых колебаний спектр выходного сигнала будет заметно искажен паразитными составляющими, а при достаточно сильной расстройке возможен выход из синхронного режима. Поэтому были построены алгоритмы построения границ зон синхронизма различных (произвольных) кратностей на плоскости управляющих параметров. Это позволило точно анализировать спектры выходных колебаний (синусоидальных, прямоугольных импульсов) ДСФС при наличии неравномерности в выборках. В случае, когда выходной сигнал представляет собой последовательность прямоугольных импульсов, обнаружен новый физический эффект, заключающийся в том, что нули спектра выходного сигнала при движении к границам зон синхронных режимов располагаются неравномерно на оси частот. Решение возникающих проблем со спектрами генерируемых колебаний требует специального исследования.

Работа выполнена при поддержке Совета по грантам Президента РФ для поддержки молодых российских ученых и ведущих научных школ (грант №НШ-3344.2008.8 и НШ-5708.2008.9).

Литература

1. Lindsey, W., Synchronization Systems in Communication and Control. Prentice-Hall, Inc. New Jersey. 1972.
2. Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров. М.: Мир. 1990.
3. Кузнецов С. П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Физматлит. 2001.
4. Капранов М. В., Кулешов В. Н., Уткин Г. М. Теория колебаний в радиотехнике. М.: Наука. 1984.
5. Генерирование колебаний и формирование радиосигналов / под ред. В. Н. Кулешова и Н. Н. Удалова. М.: МЭИ. 2008.
6. Капранов М. В. Элементы теории систем фазовой синхронизации. М.: МЭИ. 2006.
7. Капранов М. В., Томашевский А. И. Регулярная и хаотическая динамика нелинейных систем с дискретным временем. М.: МЭИ. 2009.
8. Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001.
9. Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь. 1972.
10. Шарковский А. Н. Майстренко Ю. Л. Романенко Е. Ю. Разностные уравнения и их приложения. Киев: Наукова думка. 1986.
11. Сафин А. Р. Спектры колебаний в зонах дробной кратности в ЦСФС с неоднородной выборкой // Радиоэлектроника, электротехника и энергетика: 15-я Международ. научн.-техн. конф. студентов и аспирантов: Тезисы докл. В 3-х томах. М.: МЭИ. 2002. Т. 1. С. 48–49.

Поступила 15 июля 2009 г.

Oscillation Spectrums in Discrete Synchronization System with Nonuniform Sample

© Autors, 2009

M. V. Kapranov, A. R. Safin

Phase synchronisation systems (PSS) are widely applied in various areas of a radio engineering. Among a considerable quantity various PSS a special place occupy discrete PSS (DPSS), working with samples of the entrance signal, allowing to receive on an exit of system oscillations with the fractionally rational relation of frequencies. For example, in the theory of frequencies synthesis such systems allow to receive high-precision oscillations, without using frequency dividers, irreplaceable in continuous PSS. However, at an inevitable mismatch of own frequencies of synchronizable oscillations there is a non-uniformity in sample reference (arriving on a system input) of a signal. This phenomenon generates essential "fouling" of a spectrum of a target signal with appreciable decrease in the basic components of a spectrum. In this paper, the nature of destruction of a spectrum of target signal in DPSS with non-uniform sample is investigated. In the first part known data about working of DPSS with non-uniform sample are presented. Comparison of work continuous PSS and DPSS with samples in problems of synthesis of oscillations with the fractionally rational relation of frequencies (synthesizers of frequencies) is made. Mathematical expressions describing work of investigated system are deduced, and the technique of studying of the transitive and established processes by use of diagrammes of Lamereja–Kenigsa (and their expansions) is considered. Problem about heterogeneity influence in sample of an entrance signal on a spectrum of generated oscillations is put. In the second part the technique of delimitation of zones of synchronism of various frequency rates with beforehand set accuracy is investigated. Adjustment cases 1:1, 1:2 and 1:3 are in detail studied. The higher frequency rates 1:n which can be reached in DPSS, are considered to a similar case 1:3. Some results about multistability occurrence in system are presented. In the third part spectra of fluctuations in zones with frequency rates 1:1, 1:2 and 1:3 are investigated at the approach to borders of zones of corresponding frequency rates. There are numerical dependences of spectral components on frequency mismatch size. Parasitic effects in zones of the higher (more than 3) frequency rates are considered. Spectra of two types of target signals are investigated: sinusoidal and rectangular impulses.