

Модуль 1 «Математические модели геометрических
объектов»
Лекция 1 «Слайновые представления»

к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,
ауд.: 930а(УЛК)
моб.: 8-910-461-70-04,
email: azaharov@bmstu.ru



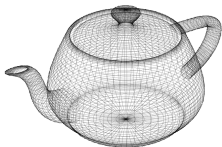
МГТУ им. Н.Э. Баумана

7 февраля 2024 г.

Геометрическое моделирование изучает методы построения кривых линий, поверхностей и твёрдых тел, методы выполнения над ними различных операций и их визуализации.

Геометрические модели играют важную роль в конструировании, производстве и изображении объектов. Примерами областей их применения являются:

- ▶ проектирование корпусов и оболочек в машиностроении — автомобилей, кораблей и отдельных деталей;
- ▶ дизайн изделий легкой промышленности — мебели, посуды, обуви и одежды;
- ▶ разработка программ обработки поверхностей для станков с ЧПУ;
- ▶ визуализация экспериментальных данных о границах раздела сред в естественных науках — медицине (компьютерная томография), геологии и локации (построение рельефа поверхности Земли, морского дна, космических объектов).



Многие кривые и поверхности имеют довольно сложную форму, не допускающую универсального аналитического задания в целом при помощи элементарных функций. Поэтому их собирают из сравнительно простых гладких фрагментов — отрезков (кривых) или лоскутов (поверхностей), каждый из которых может быть вполне удовлетворительно представлен в виде элементарной функции одной или двух переменных.

Черчение:

Сплайн — тонкая гибкая стальная линейка, используемая для получения гладкой кривой, проходящей по набору заданных точек.

Компьютерная графика:

Сплайновая кривая — любая составная кривая, сформированная полиномиальными участками, удовлетворяющими заданным условиям непрерывности на границах участков.

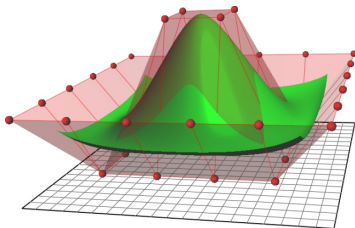
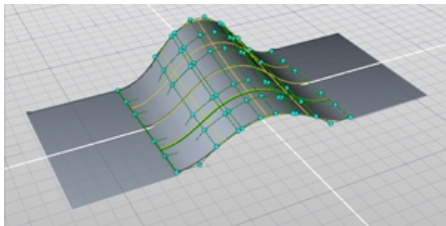
Сплайновую поверхность можно описать двумя наборами ортогональных сплайновых кривых.

Существуют

различные типы сплайнов, используемых в приложениях компьютерной графики. Каждая отдельная спецификация связана с определённым типом полиномов и граничных условий.



Одним из главных приложений методов аппроксимации сплайнами является автоматизированное геометрическое проектирование. Основная идея здесь состоит в том, чтобы обеспечить такое представление кривых и поверхностей, с которым можно легко работать на компьютере, т. е. его легко хранить в ЭВМ и легко отображать и преобразовывать на экране компьютера. Наиболее полезным было бы представление, имеющее удобные «ручки управления», т. е. некоторое множество параметров, которые контролировались бы пользователем с тем, чтобы изменять нужным образом форму кривой или поверхности. Обычно проектировщик имеет описание проектируемого объекта в виде дискретного набора точек.



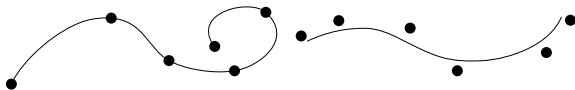


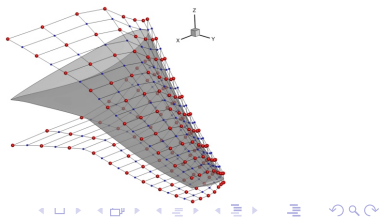
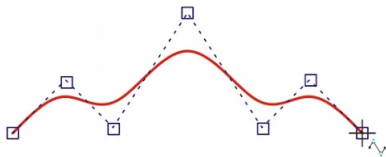
Рис.: Набор контрольных точек, интерполированных (слева) и аппроксимированных (справа) кусочно–непрерывными полиномами

Сплайн задаётся через набор координат точек, именуемых контрольными (характеристическими, опорными), которые определяют его форму и пространственное положение. Затем по данным точкам подбирается кусочно-непрерывная параметрическая полиномиальная функция. Если полиномиальные участки соединяют все контрольные точки, получающаяся кривая называется *интерполяцией* набора контрольных точек. Если генерируемая полиномиальная кривая строится так, что некоторые или все контрольные точки не лежат на пути кривой, эта кривая называется *аппроксимацией (сглаживанием)* набора контрольных точек. То же самое справедливо и при построении интерполяций или аппроксимаций поверхностей с помощью сплайнов.

Методы интерполяции широко используются для оцифровки рисунков или задания путей анимации. Методы аппроксимации применяются в основном в средствах проектирования для создания форм объектов.

Интерактивное конструирование кривых

Сплайновая кривая или поверхность определяется и модифицируется путём действий с контрольными точками. Интерактивно выбирая положения контрольных точек в пространстве, разработчик может задавать первоначальную форму. После того как для данного набора контрольных точек на экране отображено полиномиальное представление, разработчик может изменить положения некоторых или всех контрольных точек, подбирая форму объекта. Геометрические преобразования (трансляция, вращение и масштабирование) применяются к объектам также через преобразование контрольных точек. Программы САПР иногда позволяют вводить дополнительные контрольные точки, чтобы помочь разработчику получить требуемую форму объекта. Некоторые формы, такие как крыло самолета или корпус парусной шлюпки, формируются исходя из сложного сочетания теории, эстетики, интуиции и опыта.

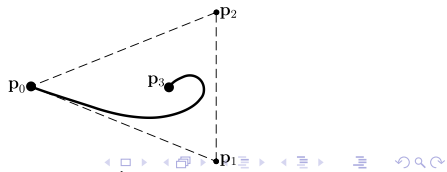
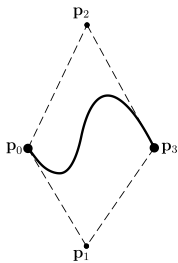


Выпуклая оболочка контрольных точек

Набор контрольных точек формирует границу области пространства, называемую *выпуклой оболочкой (convex hull)*. Выпуклой оболочкой для множества точек $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$, называется множество всех точек, удовлетворяющих выражению

$$\sum_{i=0}^n \alpha_i \mathbf{p}_i, \text{ где все } \alpha_i \text{ неотрицательны и } \sum_{i=0}^n \alpha_i = 1.$$

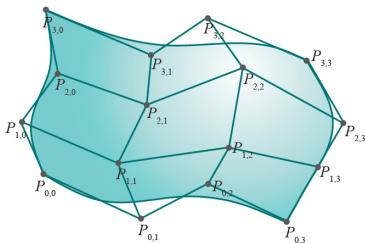
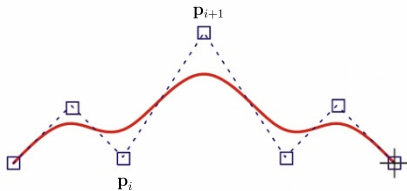
Выпуклая оболочка двумерной сплайновой кривой является выпуклым многоугольником. В трёхмерном пространстве выпуклая оболочка набора сплайновых кривых формирует выпуклый многогранник. Если сплайн полностью лежит внутри выпуклой оболочки, то это гарантирует, что его форма следует за контрольными точками без ложных осцилляций.



Контрольный полигон и полиэдр контрольных точек

Контрольный полигон контрольных точек \mathbf{p}_i , $i = 0, 1, \dots, n$ представляет собой кусочно-линейную кривую (ломаную), каждый отрезок которой соединяет контрольные точки \mathbf{p}_i и \mathbf{p}_{i+1} , $i = 0, 1, \dots, n - 1$.

Контрольный полиэдр контрольных точек $\mathbf{p}_{i,j}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m$ представляет собой совокупность прямоугольных ячеек $\mathbf{P}_{i,j}$, $\mathbf{P}_{i+1,j}$, $\mathbf{P}_{i+1,j+1}$, $\mathbf{P}_{i,j+1}$; $i = 0, 1, \dots, n - 1$; $j = 0, 1, \dots, m - 1$.



Существуют три основных подхода к описанию кривых и поверхностей в пространстве.

Явный вид:

$y = f(x), z = g(x)$ — для описания кривых;

$z = f(x, y)$ — для описания поверхностей.

Этот выбор имеет несколько очевидных недостатков:

- ▶ Нельзя однозначно описать замкнутые кривые, например, окружности или эллипсы. Такие объекты приходится предварительно разбивать на ряд сегментов и искать описание каждого из них.
- ▶ Полученное описание не обладает инвариантностью относительно поворотов. Чтобы задать повернутую версию кривой следует проделать значительную вычислительную работу, а в общем случае требуется получить новое разбиение кривой на сегменты.
- ▶ При попытке задать кривые с очень большими углами наклона возникают большие вычислительные сложности.

Неявный вид:

$$f(x, y, z) = 0.$$

Недостатки:

- ▶ Выбранное уравнение способно продуцировать несколько решений, в числе которых могут содержаться и паразитные.
- ▶ Кривая в трёхмерном пространстве задаётся как пересечение двух поверхностей, т.е. требуется решать систему алгебраических уравнений.
- ▶ В процессе объединения неявно заданных фрагментов кривых возникают серьезные проблемы. Часто в точках их сочленения невозможно определить точную величину тангенса угла наклона, значение которого используется в процессе решения многих геометрических задач.

Способы описания кривых и поверхностей

Параметрическое задание кривой в виде $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ и поверхности в виде $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ преодолевает недостатки явного и неявного способов описания. С его помощью можно задавать многозначные кривые, т.е. такие зависимости, которые могут принимать несколько значений при одном значении аргумента.

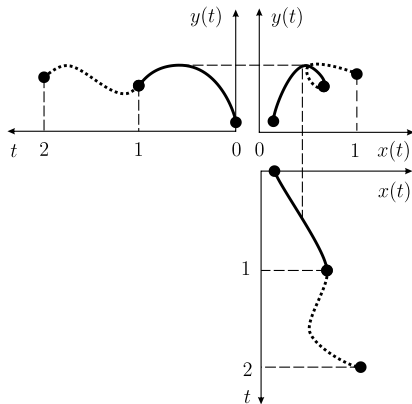


Рис.: Вид параметрической кривой и её координатное представление

Для построения функции интерполяционного сплайна в параметрической форме, к заданным координатам контрольных точек \mathbf{p}_i , $i = 0, 1, \dots, n$ требуется добавить информацию о значении параметрической координаты в них — t_i . Значение параметра для каждой последующей опорной точки \mathbf{p}_{i+1} должно быть больше узлового значения параметра для предыдущей опорной точки \mathbf{p}_i : $t_i < t_{i+1}$, $i = 0, \dots, n - 1$.

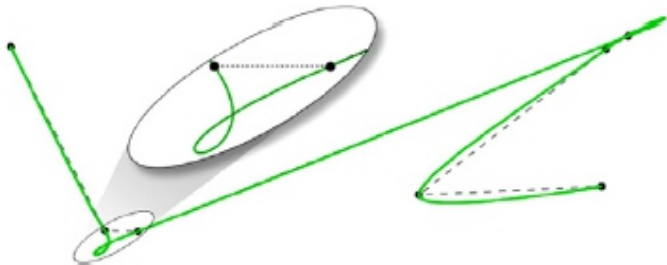
Существуют различные варианты задания параметрических координат контрольных точек, которые влияют на форму и параметризацию получающегося интерполяционного сплайна. Будем предполагать, что параметр $t \in [0, 1]$. Обычно используют 3 метода выбора параметра t_i или, как ещё говорят, параметризации.

Задание параметрических координат контрольных точек. Равномерное распределение

Кривые, построенные на множестве равноотстоящих узлов, называются *однородными* (uniform). Для однородных кривых выполняется равенство: $t_i - t_{i-1} = t_{i+1} - t_i$. Для получения значений t_i используются формулы:

$$t_0 = 0, \quad t_n = 1,$$
$$t_i = \frac{i}{n}, \quad i = 1, \dots, n - 1.$$

Этот метод использовать не рекомендуется, так как он приводит к непредсказуемым результатам (таким как «петли»), когда точки расположены неравномерно.



Задание параметрических координат контрольных точек. Метод на основе длин хорд

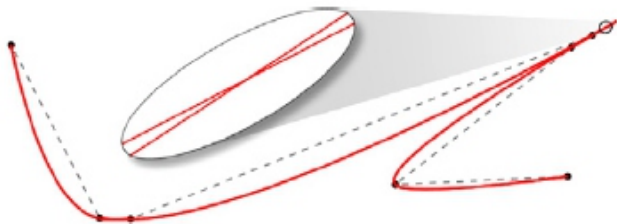
Пусть d — общая длина контрольного полигона:

$$d = \sum_{i=1}^n \|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\|.$$

Тогда способ параметризации на основе длин хорд имеет вид:

$$t_0 = 0, \quad t_n = 1,$$
$$t_i = t_{i-1} + \frac{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\|}{d}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Это наиболее распространённый метод, который даёт «хорошую» параметризацию.



Задание параметрических координат контрольных точек. Центростремительный метод

Пусть d определяется следующим образом:

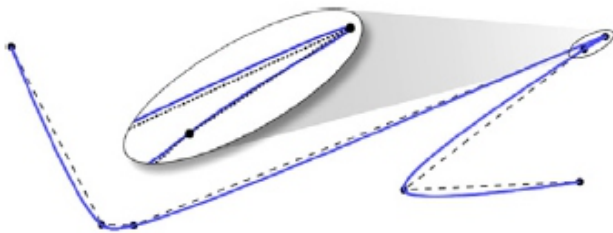
$$d = \sum_{i=1}^n \sqrt{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\|}.$$

Тогда центростремительный способ параметризации имеет вид:

$$t_0 = 0, \quad t_n = 1,$$

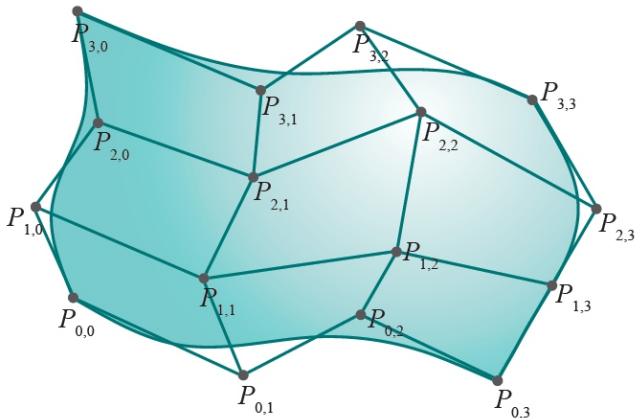
$$t_i = t_{i-1} + \frac{\sqrt{\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}\|}}{d}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Этот метод даёт «лучшие» результаты, чем метод, основанный на вычислении длин хорд, когда линия или поверхность имеет «острые» углы и повороты.



Задание параметрических координат контрольных точек поверхности

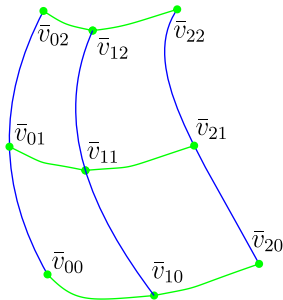
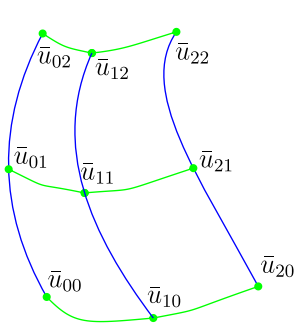
Рассмотрим задачу выбора значений параметрических координат (u_i, v_j) для контрольных точек $\mathbf{p}_{i,j}$, $i = 0, 1, \dots, n$, $j = 0, 1, \dots, m$. Для корректного построения сплайна, параметрическая координата u_i , должна быть одинаковой для всех точек $\mathbf{p}_{i,j}$, $j = 0, 1, \dots, m$. Аналогичное правило действует и для параметрической координаты v_j , которая должна быть одинаковой для всех точек $\mathbf{p}_{i,j}$, $i = 0, 1, \dots, n$.



Задание параметрических координат контрольных точек поверхности

Выберем один из 3-х рассмотренных методов (равномерное распределение, метод на основе длин хорд или центростремительный метод) и рассчитаем значение параметров $\bar{u}_{0j}, \dots, \bar{u}_{nj}$ для каждого значения $j = 0, 1, \dots, m$. Аналогично, рассчитаем значения $\bar{v}_{i0}, \dots, \bar{v}_{im}$ для каждого значения $i = 0, 1, \dots, n$. Значения u_i получим осреднением значений \bar{u}_{ij} по всем сечениям $j = 0, 1, \dots, m$. Значения v_j получим осреднением значений \bar{v}_{ij} по всем сечениям $i = 0, 1, \dots, n$, т.е.

$$u_i = \frac{1}{m+1} \sum_{j=0}^m \bar{u}_{ij}, \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad v_j = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n \bar{v}_{ij}, \quad j = 0, 1, \dots, m.$$



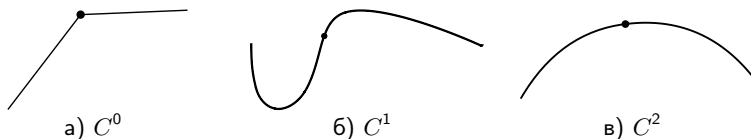


Рис.: Кусочно–гладкое построение кривой путём соединения двух сегментов с использованием непрерывности разного порядка

Если каждый i -й участок сплайновой кривой описывается уравнением

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad \mathbf{r}'(t) = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right)^T,$$

то непрерывность достигается согласованием производных по параметру соединяющихся участков кривых в их общей граничной точке.

Если два сегмента параметрической кривой соединены, то говорят, что кривая принадлежит в данной точке к классу непрерывности C^0 .

Непрерывности первого порядка C^1 часто достаточно для оцифровки рисунков и в некоторых конструкторских приложениях, тогда как непрерывность второго порядка C^2 полезна при задании путей анимации для движения камеры и во многих точных приложениях автоматизированного проектирования.

Условия геометрической непрерывности

Если совпадают направления касательных векторов (необязательно значения), то кривая в точке соединения принадлежит классу геометрической непрерывности G^1 . Длины касательных векторов таких сегментов связаны прямо пропорциональным соотношением $r'_1(t_1) = kr'_2(t_1)$, где k — коэффициент пропорциональности. В системах автоматизированного проектирования во многих операциях используются геометрические непрерывные кривые, поскольку они воспринимаются наблюдателем как гладкие. С помощью репараметризации, геометрическую непрерывность G^m можно свести к непрерывности C^m .

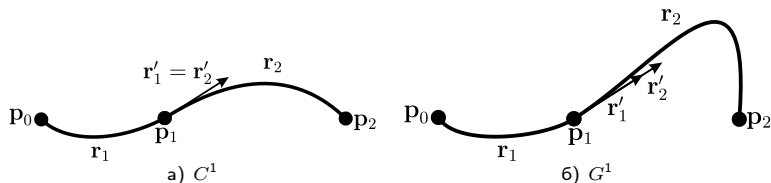
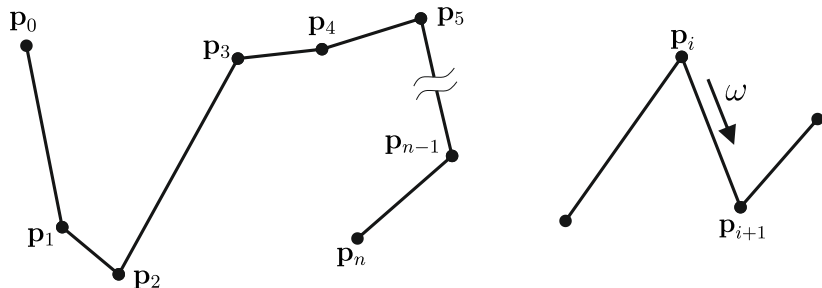


Рис.: По трем контрольным точкам построены кривые: а) с условием параметрической непрерывности; б) с условием геометрической непрерывности, где касательный вектор кривой r'_2 в точке p_1 имеет большую длину, чем касательный вектор кривой r'_1 в точке p_1

Для быстрого генерирования кривой мы хотим, чтобы стыковочные функции вычислялись просто. Кроме того, желательна также минимальная чувствительность к численным ошибкам округления. Эти рассуждения приводят нас к выбору в качестве стыковочных функций полиномов, причём степень этих полиномов должна быть достаточно малой. Другие типы функций, такие как синусы и косинусы, использовать было бы слишком накладно.

Интерполяция линейными сплайнами



Ломаная линия с вершинами в точках \mathbf{p}_i , $i = 0, 1, 2, \dots, n$:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}_i (1 - \omega) + \mathbf{p}_{i+1} \omega,$$

где

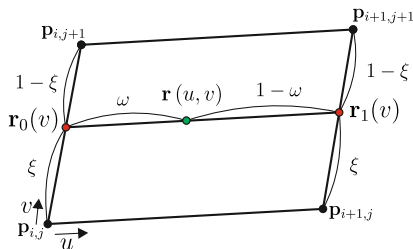
$$\omega = \frac{t - t_i}{h_i},$$

$$h_i = t_{i+1} - t_i,$$

$$t_i < t_{i+1},$$

$$t_i \leq t \leq t_{i+1}.$$

Интерполяция линейными сплайнами



Для построения линейной интерполяции участка поверхности между вершинами $\mathbf{p}_{i,j}$, $\mathbf{p}_{i,j+1}$, $\mathbf{p}_{i+1,j}$, $\mathbf{p}_{i+1,j+1}$; $i = 0, 1, 2, \dots, n$; $j = 0, 1, 2, \dots, m$ запишем линейно интерполированные граничные линии

$$\mathbf{r}_0(v) = \mathbf{p}_{i,j}(1 - \xi) + \mathbf{p}_{i,j+1}\xi, \quad \xi = \frac{v - v_j}{d_j}, \quad d_j = v_{j+1} - v_j,$$

$$\mathbf{r}_1(v) = \mathbf{p}_{i+1,j}(1 - \xi) + \mathbf{p}_{i+1,j+1}\xi.$$

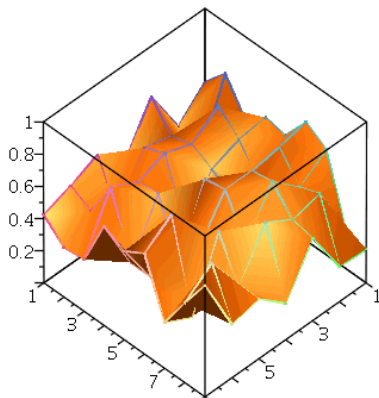
Зафиксируем значение параметра в интервале $v_j \leq v \leq v_{j+1}$ и построим линейную интерполяцию граничных точек сегмента $\mathbf{r}_0(v)$ и $\mathbf{r}_1(v)$ по первому непрерывному параметру $u_i \leq u \leq u_{i+1}$:

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0(v)(1 - \omega) + \mathbf{r}_1(v)\omega,$$

которая также является отрезком прямой.

Интерполяция линейными сплайнами

Кусочно–линейная интерполяция всегда гарантирует сходимость интерполяционного процесса к интерполируемой функции. Однако, чтобы получить высокую точность кусочно-линейной интерполяции сложных кривых или поверхностей, в общем случае, требуется большое количество фрагментов. Это влечёт необходимость хранения и обработки больших массивов контрольных точек, что способно усложнить некоторые интерактивные операции с геометрическими формами.



Интерполяция кубическими сплайнами наиболее часто используется для настройки путей движения объектов или получения представления существующего объекта или рисунка, хотя интерполирующие сплайны также иногда применяются для разработки форм объектов. Кубические сплайны предлагают разумный компромисс между гибкостью и скоростью вычислений. По сравнению с полиномами более высоких порядков кубические сплайны требуют меньше расчётов и памяти, они более устойчивы. Полиномы низших порядков могут не обеспечивать достаточной точности. Кроме того, параметрические кубические кривые — это кривые самого низкого порядка, которые могут занимать произвольное положение (не лежать на плоскости) в трёхмерном пространстве. Действительно, положение кривой, описываемой полиномом второй степени, задаётся тремя точками, а три точки всегда определяют плоскость. Построение кубических сплайнов сводится к решению системы линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, имеющей доминирующую главную диагональ. Решение таких систем легко реализуется численно.

Чтобы интерполировать заданный набор контрольных точек кубическими сплайнами, по входным данным подбирается кусочно-кубическая полиномиальная кривая, проходящая через все контрольные точки.

Далее сплайновые представления обобщаются на случай пространственных поверхностей.