Модуль 1 «Математические модели геометрических объектов»
Лекция 4 «B-сплайны и B-сплайновые поверхности. NURBS-кривые»

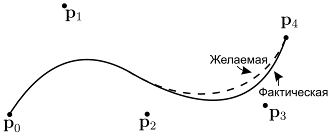
к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,
ауд.: 930а(УЛК)
моб.: 8-910-461-70-04,
email: azaharov@bmstu.ru

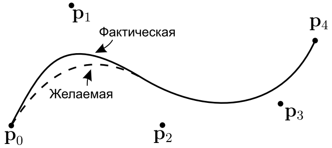
МГТУ им. Н.Э. Баумана

20 марта 2025 г.

Введение

Данная категория сплайнов является наиболее используемой, и функции *B-сплайнов* широко применяются в системах автоматизированного проектирования и многих пакетах графического программирования. Подобно сплайнам Безье, B-сплайны генерируются путём аппроксимации набора контрольных точек. В то же время, B-сплайны обладают двумя преимуществами по сравнению со сплайнами Безье: во-первых, степень полинома B-сплайна можно задать независимо от числа контрольных точек (с определенными ограничениями); во-вторых, B-сплайны допускают локальный контроль над формой кривой. Платой за это является бóльшая сложность B-сплайнов по сравнению со сплайнами Безье.
В кривой Безье глобальное влияние каждой опорной точки $\mathbf{p}_i$ на всю кривую происходит из-за того, что каждая из функций B_i^n не равна нулю на всем интервале (0;1). Если бы вместо функций Бернштейна выступали функции с локальными носителями, существенно меньшими, чем область определения параметра кривой t, то удалось бы локализовать влияние отдельной точки на всю кривую.





Введение

Поэтому поставим задачу следующим образом. Пусть даны контрольные точки $\mathbf{p}_0, \ldots, \mathbf{p}_n$. Определим кривую $\mathbf{r}(t)$ по формуле

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} N_i(t)\mathbf{p}_i, \qquad t_{\text{min}} \leqslant t \leqslant t_{\text{max}}, \tag{1}$$

где $N_i(t)$ — набор кусочно-полиномиальных функций, таких, что

1. $N_i(t) = 0$ при $t \notin [a_i, b_i] \subset [t_{\text{min}}, t_{\text{max}}]$;
2. $N_i(t)$ линейно независимы и образуют базис.
3. $\sum\limits_{i=0}^{n} N_i(t) = 1$ для каждого $t \in [t_{\text{min}}, t_{\text{max}}]$.

Последнее условие вводится для того, чтобы в случае совпадения всех контрольных точек кривая превращалась бы в ту же точку.
Решение поставленной задачи даётся B-кривыми (сокр. от базисные — basis). B-кривые обобщают кривые Безье.

Уравнение B-сплайна

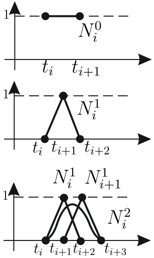
Общее выражение для расчёта координат точек B-сплайна:

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^{n} N_i^k(t)\mathbf{p}_i, \qquad t_{\mathsf{min}} \leqslant t \leqslant t_{\mathsf{max}}, \quad 0 \leqslant k \leqslant n.$$

В 1972 г. Кокс (Cox) и де Бур (de Boor) предложили использовать функции N_i^k, определяемые рекурсивно:

$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_i \leqslant t < t_{i+1}, \qquad 0 \leqslant i < n+k+1 \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases}$$

$$N_i^k(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+k} - t_i} N_i^{k-1}(t) + \frac{t_{i+k+1} - t}{t_{i+k+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{k-1}(t). \tag{2}$$



Функции N_i^k называют базисными функциями. Каждая точка t_i называется *узлом* (knot). Узлы определяют области, внутри которых функции сопряжения имеют ненулевые значения. Полный набор используемых узлов $\{t_0, \ldots, t_{n+k+1}\}$ называется *вектором узлов* (knot vector). Значения узлов можно выбирать любыми при условии, что $t_i \leqslant t_{i+1}$. В частности, расстояния между соседними узлами могут быть равны нулю, тогда говорят о кратности узлов.

Свойства базисных функций

Свойство локальности: каждая базисная функция $N_i^k = 0$, если $t \notin [t_i, t_{i+k+1})$.

$$\begin{tikzcd}
N_1^0 & & N_0^2 & \\
& N_1^1 \arrow[ul] \arrow[dl] & & N_0^3 \\
N_2^0 & & N_1^2 \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
& N_2^1 \arrow[ul] \arrow[dl] & & N_1^3 \arrow[ul] \arrow[dl] \\
N_3^0 & & N_2^2 \arrow[ul] \arrow[dl] & \\
& N_3^1 \arrow[ul] \arrow[dl] & & N_2^3 \\
N_4^0 & & N_3^2 &
\end{tikzcd}$$

N_1^3 — комбинация значений функций N_1^0, N_2^0, N_3^0 и N_4^0. Таким образом, функции N_1^3 отличны от нуля только для значений $t \in [t_1, t_5)$.

Свойства базисных функций

В любом заданном промежутке $[t_i, t_{i+1})$ могут быть отличны от нуля только $k+1$ функций: $N_{i-k}^k, \ldots, N_i^k$.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & N_1^1 & & & & N_0^3 \\
 & & & & & \nearrow & \\
N_2^0 & & & & N_1^2 & & \\
 & & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & N_2^1 & & & & N_1^3 \\
 & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
N_3^0 & & & & N_2^2 & & \\
 & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & N_3^1 & & & & N_2^3 \\
 & & & \searrow & & \nearrow & \\
N_4^0 & & & & N_3^2 & & \\
 & & & & & \searrow & \\
 & & N_4^1 & & & & N_3^3
\end{array}
$$

На интервале $[t_3, t_4)$ единственной функцией, отличной от нуля, является функция N_3^0. Следовательно, единственные кубические функции, отличные от нуля на $[t_3, t_4)$ — это функции $N_0^3, \ldots, N_3^3$.

Алгоритм вычисления базисных функций B-сплайна

В силу последнего свойства, при вычислении базисных функций N^k в точке t, важно уметь находить индекс i в векторе узлов, при котором выполняется соотношение $t_i \leqslant t \leqslant t_{i+1}$.
Отдельно стоит рассмотреть случай вычисления значения i при максимально возможном значении параметра $t = t_{n+1}$. В этом случае, параметр i следует принять равным n, т.е. расширить область $t \in [t_n, t_{n+1}]$ в которой функция $N_n^0 = 1$.
В общем случае для вычисления значения i можно использовать алгоритмы линейного или бинарного поиска.

Алгоритм вычисления базисных функций B-сплайна

Листинг алгоритма бинарного поиска индекса i:

```
/// \param [in] n,k,t,knot_vector
/// \return i
findSpan(n,k,t,knot_vector)
{
    if (t == knot_vector[n + 1])
        return n; /* Special case */

    /* Do binary search */
    low = k;    high = n + 1;
    mid = (low + high) / 2;
    while ((t < knot_vector[mid]) || (t >= knot_vector[mid + 1])) {
        if (t < knot_vector[mid])
            high = mid;
        else
            low = mid;
        mid = (low + high) / 2;
    }

    return mid;
}
```

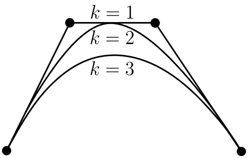
Алгоритм вычисления базисных функций B-сплайна

Приведем листинг алгоритма для вычисления ненулевых базисных функций $N_{i-k}^k, \ldots, N_i^k$:

```
/// \param [in] i,t,k,knot_vector
/// \param [out] N (массив базисных функций, нумерация с нуля!)
basisFunc(i,t,k,knot_vector,N)
{
    N[0] = 1.0;
    for (j = 1; j <= k; j++) {
        left[j] = t - knot_vector[i + 1 - j];
        right[j] = knot_vector[i + j] - t;
        saved = 0.0;
        for (r = 0; r < j;  r++) {
            temp = N[r]/(right[r+1]+left[j-r]);
            N[r] = saved + right[r+1]*temp;
            saved = left[j-r]*temp;
        }
        N[j] = saved;
    }
}
```

Свойства B-сплайнов

- Полиномиальная кривая имеет степень k и непрерывность C^{k-1}.
- Диапазон параметра t делится на $n+k+1$ подынтервалов $n+k+2$ значениями, заданными в векторе узлов.
- Если значения узлов обозначить $\{t_0, t_1, \dots, t_{n+k+1}\}$, получающийся B-сплайн определяется только в промежутке $[t_k, t_{n+1})$, т.к. только в этом промежутке $\sum\limits_{i=0}^{n} N_i^k(t) = 1$.
- Каждый участок сплайна определяется $k+1$ контрольными точками.
- Локальная коррекция: любая контрольная точка $\mathbf{p}_i$ может влиять на форму кривой $\mathbf{r}(t)$ только на интервале $[t_i, t_{i+k+1})$.
- При движении вдоль кривой, функции $N_i^k(t)$ действуют подобно переключателям. Когда t проходит мимо узла t_{i+k+1} в векторе узлов, функция N_i^k (и, соответственно, точка $\mathbf{p}_i$) выключаются, поскольку становится равной нулю, и включаются следующие.
- Чем меньше степень кривой, тем ближе она подходит к контрольным точкам. Кривые высоких порядков более гладкие.



Свойства B-сплайнов

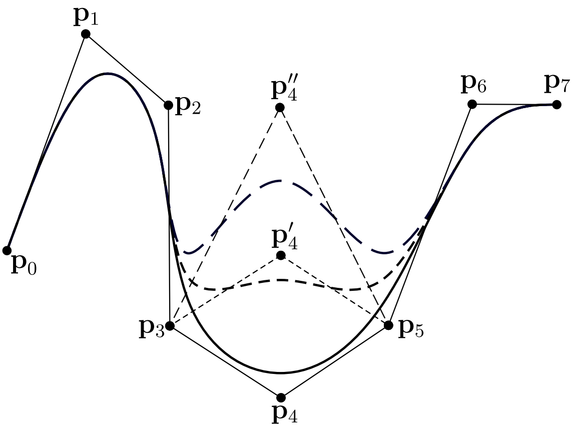
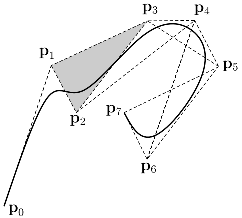


Рис.: Локальная коррекция B-сплайна.

Помимо локального контроля B-сплайны позволяют варьировать число контрольных точек, используемых в разработке кривой, без изменения степени полинома.

Свойства B-сплайнов

- Кривые на базе B-сплайнов аффинно инвариантны. Для преобразования B-сплайн кривой мы просто преобразуем каждую контрольную точку и генерируем новую кривую.
- B-сплайн кривая является выпуклой комбинацией своих контрольных точек и поэтому лежит внутри их выпуклой оболочки. Возможно более сильное утверждение: при любом значении $t \in [t_k, t_{n+1}]$ только $k+1$ функций B-сплайна «активны» (то есть отличны от нуля). В этом случае кривая должна лежать внутри выпуклой оболочки не более $k+1$ последовательных активных контрольных точек.
- B-сплайн кривые обеспечивают линейную точность: если $k+1$ последовательных контрольных точек коллинеарны, то их выпуклая оболочка будет прямой линией, и кривая будет захвачена внутрь её.
- B-сплайн кривые уменьшают колебания: B-сплайн кривая не пересекает никакую линию чаще, чем её контрольный полигон.



Выпуклые оболочки для квадратичной B-сплайн кривой

Аналогично случаю вычисления производной от кривой Безье, производная B-сплайна записывается через уравнение B-сплайна, порядок которого на единицу меньше исходного. Если параметр t лежит между узловыми значениями t_l и t_{l+1}, то производная от B-сплайна имеет следующий вид:

$$\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \sum_{i=l-k+1}^{l} N_i^{k-1}(t)\mathbf{p}_i^1, \tag{3}$$

где

$$\mathbf{p}_i^1 = k\frac{\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}}{t_{i+k} - t_i}. \tag{4}$$

Правая часть уравнения (3) имеет форму уравнения B-сплайна, поэтому можно предполагать, что производные более высоких порядков могут быть получены рекурсивным применением формулы (3). Так, производная порядка m от B-сплайна имеет вид:

$$\frac{d^m\mathbf{r}(t)}{dt^m} = \sum_{i=l-k+m}^{l} N_i^{k-m}(t)\mathbf{p}_i^m, \tag{5}$$

где

$$\mathbf{p}_i^m = (k-m+1)\frac{\mathbf{p}_i^{m-1} - \mathbf{p}_{i-1}^{m-1}}{t_{i+k+1-m} - t_i}. \tag{6}$$

Равномерные периодические B-сплайны

Разные методы задания узловых значений позволяют получить разные функции сопряжения и, соответственно, разные кривые. Если расстояние между значениями в узлах постоянно, получающаяся в результате кривая называется *равномерным* B-сплайном. Например, можно задать следующий равномерный вектор узлов:

$$\{-1.5; -1.0; -0.5; 0.0; 0.5; 1.0; 1.5; 2.0\}.$$

Часто значения узлов нормируются в диапазон от 0 до 1:

$$\{0.0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0\}.$$

Во многих приложениях удобно задать равномерные значения узлов с шагом 1 и начальным значением 0:

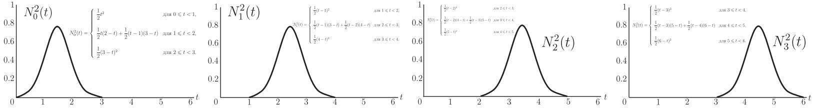
$$\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}.$$

Равномерные B-сплайны имеют *периодические* стыковочные функции. Следовательно, для заданных значений n и k все стыковочные функции имеют одинаковую форму. Каждая последующая стыковочная функция является просто смещённой версией предыдущей:

$$N_i^k(t) = N_{i+1}^k(t + \Delta t) = N_{i+2}^k(t + 2\Delta t), \tag{7}$$

где Δt — интервал между соседними значениями узлов.

Пример. Равномерные квадратичные B-сплайны



а) б) в) г)

Рис.: Периодические стыковочные функции равномерного B-сплайна

Проиллюстрируем стыковочные функции B-сплайнов для равномерного целого вектора узлов при $k+1=n=3$. Вектор узлов должен содержать $n+k+2=7$ значений узлов: $\{0;1;2;3;4;5;6\}$. Каждая из четырёх стыковочных функций захватывает $k+1=3$ подынтервалов. Используя рекуррентные формулы (2), получаем первую стыковочную функцию $N_0^2(t)$. Следующая функция N_1^2 получается с использованием соотношения (7) при подстановке $t-1$ вместо t в N_0^2 и смещения начального положения t на 1 в сторону увеличения. Подобным образом, оставшиеся две периодические функции получаются последовательным смещением N_1^2 вправо. Первая контрольная точка умножается на стыковочную функцию N_0^2. Следовательно, изменение положения первой контрольной точки влияет только на форму кривой до $t=3$. Аналогично последняя контрольная точка влияет на форму сплайновой кривой в интервале, где определена N_3^2.

Пример. Равномерные квадратичные B-сплайны

Поскольку диапазон получающейся полиномиальной кривой принадлежит промежутку от $t_k = 2$ до $t_{n+1} = 4$, начальную и конечную позицию кривой можно определить, вычислив стыковочные функции в этих точках:

$$\mathbf{r}(2) = 0.5(\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1), \qquad \mathbf{r}(4) = 0.5(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3).$$

Т.о., кривая начинается посередине между первыми двумя контрольными точками и заканчивается посередине между двумя последними.
Вычисляя производные стыковочных функций, получаем:

$$\mathbf{r}'(2) = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0, \qquad \mathbf{r}'(4) = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2.$$

Параметрическая касательная кривой в начале параллельна линии, соединяющий первые две контрольные точки, а параметрическая касательная в конце кривой параллельна линии, соединяющей последние две контрольные точки.

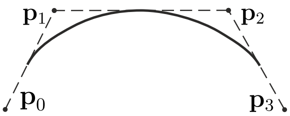
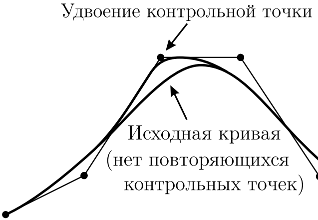


Рис.: Квадратный периодический B-сплайн, построенный по четырём контрольным точкам на плоскости xy. Кривая проходит через середины ребер контрольного полигона

Равномерные периодические B-сплайны

В предыдущем примере было отмечено, что квадратичная кривая начинается между первыми двумя и заканчивается между двумя последними контрольными точками. Полученный результат справедлив для квадратичных периодических B-сплайнов, подобранных по любому числу различных контрольных точек. Вообще, для полиномов высокого порядка начальная и конечная точки являются взвешенным средним k контрольных точек. Кроме того, как это было для кривых Безье, сплайновую кривую можно поместить ближе к любой контрольной точке, введя эту точку несколько раз. При задании кратности k выпуклые оболочки, окружающие эту точку состоят из ребер контрольного полигона, поэтому кривая «захватывается» этим ребром на протяжении одного диапазона полиномов. Аналогичного действия можно добиться, увеличивая кратность значения в векторе узлов. Однако это приводит к уменьшению непрерывности на 1 при каждом повторе узлового значения.



Открытые равномерные B-сплайны

Данный класс B-сплайнов является промежуточным между равномерными и неравномерными B-сплайнами. Иногда он считается частным случаем равномерного B-сплайна, а иногда он относится к неравномерным B-сплайнам. Для *открытых равномерных* B-сплайнов, или просто *открытых* B-сплайнов, расстояние между узлами равномерно, за исключением концов, где значения узлов повторяются $k+1$ раз. Примеры открытых равномерных целочисленных векторов узлов:

$$\{0,0,1,2,3,3\} \qquad \text{для } k=1 \text{ и } n=3,$$
$$\{0,0,0,0,1,2,2,2,2\} \qquad \text{для } k=3 \text{ и } n=4.$$

Данные векторы можно нормировать в единичный интервал от 0 до 1:

$$\{0,0,0.33,0.67,1,1\} \qquad \text{для } k=1 \text{ и } n=3,$$
$$\{0,0,0,0,0.5,1,1,1,1\} \qquad \text{для } k=3 \text{ и } n=4.$$

Для любых значений параметров k и n открытый равномерный вектор узлов с целыми значениями можно сгенерировать, используя формулы

$$t_i = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k, \\ i-k & \text{для } k+1 \leqslant i \leqslant n, \\ n-k+1 & \text{для } n < i \leqslant n+k+1. \end{cases}$$

При этом первым $k+1$ узлам присваивается значение 0, а последние $k+1$ узлов имеют значение $n-k+1$.

Открытые равномерные B-сплайны

Открытые равномерные B-сплайны обладают характеристиками, весьма подобными характеристикам сплайнов Безье. При $n = k$ открытые B-сплайны совпадают со сплайнами Безье, и все значения узлов равны 0 или 1. Это означает, что

$$N_i^k(t) = B_i^n(t),$$

где $i = 0, \dots, n$.

Например, при кубическом открытом B-сплайне ($k = 3$) и четырёх контрольных точках вектор узлов равен:

$$\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}.$$

Полиномиальная кривая для открытого B-сплайна соединяет первую и последнюю контрольную точку. Кроме того, параметрическая касательная кривой в первой контрольной точке параллельна прямой линии, сформированной первыми двумя контрольными точками, а параметрическая касательная в последней контрольной точке параллельна линии, определённой двумя последними контрольными точками. Таким образом, геометрические условия для согласования участков кривой не отличаются от условий для кривых Безье.

Неравномерные B-сплайны

Для данного класса сплайнов вектор узлов может принимать любые значения из любых интервалов. Для *неравномерных* B-сплайнов можно выбирать несколько одинаковых внутренних значений узлов и неравномерное размещение значений узлов. Например, внутренние значения могут быть пропорциональны длинам ребер между вершинами многоугольника:

$$t_i = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leqslant i \leqslant k, \\ \left(\dfrac{\left(\dfrac{i-k}{n-k+1} \right) c_{i-k+1} + \sum\limits_{j=1}^{i-k} c_j}{\sum\limits_{j=1}^{n} c_j} \right) (n-k+1) & \text{для } k+1 \leqslant i \leqslant n, \\ n-k+1 & \text{для } n < i \leqslant n+k+1, \end{cases}$$

где $c_i = |\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_{i-1}|$.

Неравномерные B-сплайны предлагают повышенную гибкость в управлении формой кривой. Неравномерные интервалы в векторе позволяют получать различные формы стыковочных функций в различных интервалах, что может использоваться для воспроизведения определённых особенностей аппроксимации. В любой момент работы с неравномерным B-сплайном в состав кривой можно ввести дополнительный узел и изменить её форму при помощи дополнительных контрольных точек.

Объединение кривых Безье в один B-сплайн

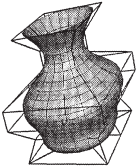
Рассмотрим проблему объединения двух или более кривых Безье в один B-сплайн. Пусть имеются две кривые Безье второй степени $\mathbf{r}_0(t)$ и $\mathbf{r}_1(t)$, определённые с помощью контрольных точек $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ и $\mathbf{p}_0'$, $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$. Требуется объединить эти кривые в одну кривую $\mathbf{r}(t)$, которая состоит из $\mathbf{r}_0(t)$, за которой следует $\mathbf{r}_1(t)$. То есть $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t)$ для $0 \leqslant t \leqslant 1$ и $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_1(t)$ для $1 \leqslant t \leqslant 2$. Это можно сделать с помощью квадратичного B-сплайна $\mathbf{r}(t)$ с узловым вектором $\{0, 0, 0, 1, 1, 1, 2, 2, 2\}$ и с шестью контрольными точками $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_0'$, $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$. Обычно две кривые Безье образуют единую непрерывную кривую, то есть $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0'$. В в этом случае $\mathbf{r}(t)$ совпадает с B-сплайном, у которого вектор узлов равен $\{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 2\}$ и который строится по пяти контрольным точкам $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$.

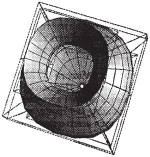
Это правило можно обобщить. Если есть три кривые Безье второй степени, которые образуют одну непрерывную кривую, то они эквивалентны квадратичному B-сплайну с вектором узлов $\{0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, 3\}$. Аналогичным образом можно построить B-сплайн по любому числу квадратичных кривых Безье, непрерывно стыкующихся между собой.

Формулировка B-сплайновой поверхности подобна формулировке поверхностных сплайнов Безье. Векторную функцию B-сплайновой поверхности можно получить, используя декартово произведение стыковочных B-сплайновых функций вида

$$\mathbf{r}(u,v) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} \mathbf{p}_{ij} N_i^k(u) N_j^l(v), \tag{8}$$

где $\mathbf{p}_{ij}$ задают положения $(n+1)$ на $(m+1)$ контрольных точек. Поверхность можно построить по выбранным значениям степеней полиномов k и l. Для каждого параметра u и v также выбираются значения векторов узлов, которые определяют диапазон параметров стыковочных функций. B-сплайновые поверхности имеют почти все те же свойства, что и составляющие их B-сплайны.





На рисунке показан другой вид, откуда становится ясно, что данная поверхность не является поверхностью вращения.

Рис.: Пример B-сплайн поверхности

Дифференцирование B-сплайновой поверхности

Достаточно часто возникает необходимость вычисления производных B-сплайновой поверхности:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial v}.$$

Продифференцируем выражение (8) по u и v:

$$\frac{\partial \mathbf{r}(u,v)}{\partial u} = \sum_{j=0}^{m} \frac{d}{du} \left(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_{i,j} N_i^k(u) \right) N_j^l(v),$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}(t,v)}{\partial v} = \sum_{i=0}^{n} \frac{d}{dv} \left(\sum_{j=0}^{m} \mathbf{p}_{i,j} N_j^l(v) \right) N_i^k(u),$$

Производную B-сплайна можно вычислить по формуле (3).

Аналогично случаю рациональных кривых Безье, контрольные точки рационального B-сплайна указываются с использованием однородных координат. Функции сопряжения применяются именно к этим однородным координатам. Координаты точки рационального B-сплайна в однородном пространстве получаются по формулам:

$$x \cdot h = \sum_{i=0}^{n} N_i^k(t)\,(h_i \cdot x_i)\,; \tag{9}$$

$$y \cdot h = \sum_{i=0}^{n} N_i^k(t)\,(h_i \cdot y_i)\,; \tag{10}$$

$$z \cdot h = \sum_{i=0}^{n} N_i^k(t)\,(h_i \cdot z_i)\,; \tag{11}$$

$$h = \sum_{i=0}^{n} N_i^k(t) h_i. \tag{12}$$

Уравнение рационального B-сплайна

Координаты точки в трёхмерном пространстве x, y и z получаются делением xh, yh и zh на h, поэтому уравнение рационального B-сплайна в векторном виде может быть записано следующим образом (поделим (9), (10) и (11) на (12)):

$$\mathbf{r}(t) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} h_i \mathbf{p}_i N_i^k(t)}{\sum\limits_{i=0}^{n} h_i N_i^k(t)} = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{p}_i R_i^k(t), \tag{13}$$

где

$$R_i^k(t) = \frac{h_i N_i^k(t)}{\sum\limits_{j=0}^{n} h_j N_j^k(t)}$$

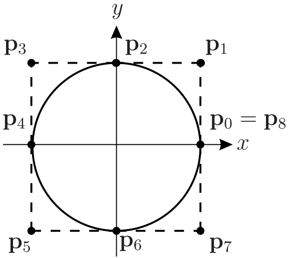
— базисные функции рационального B-сплайна.
Если всем весовым коэффициентам будут присвоены одинаковые ненулевые значения (например, 1), получим стандартный B-сплайн, поскольку в таком случае $R_i^k(t) \equiv N_i^k(t)$ для всех i.

Свойства рациональных B-сплайнов

Рациональные B-сплайны и их базисы это обобщение нерациональных B-сплайнов и базисов. При $h_i \geqslant 0$ для всех i они наследуют почти все аналитические и геометрические свойства последних. В частности:

- каждая функция рационального базиса положительна или равна нулю для всех значений параметра, т.е. $R_i^k \geqslant 0$;
- $\sum\limits_{i=0}^{n} R_i^k(t) \equiv 1$ для $t \in [t_k, t_{n+1}]$;
- при $k > 0$ каждая функция $R_i^k(t)$ имеет ровно один максимум;
- рациональный B-сплайн степени k имеет непрерывность C^{k-1};
- максимальная степень рационального B-сплайна равна количеству контрольных точек минус 1;
- рациональный B-сплайн обладает свойством уменьшения вариации;
- если $t \in [t_i, t_{i+1})$, то $\mathbf{r}(t)$ находится в пределах выпуклой оболочки, составленной из контрольных точек $\mathbf{p}_{i-k}, \ldots, \mathbf{p}_i$;
- свойство локальности $R_i^k(t) = 0$ для $t \notin [t_i, t_{i+k+1})$. Если $t \in [t_i, t_{i+1})$ только функции $R_{i-k}^k, \ldots, R_i^k$ являются ненулевыми;
- аффинная и перспективная инвариантность: применяемое к кривой преобразование можно свести к преобразованию только ее контрольных точек;
- свойство уменьшения вариации: прямая или плоскость пересекают сплайн не большее количество раз чем контрольный полигон сплайна.

Представление единичной окружности



С помощью рациональных квадратичных B-сплайнов можно сразу целиком построить окружность или какое-либо другое коническое сечение. Т.е. с их помощью можно сшить отдельные дуги, представляемые с помощью рациональных сплайнов Безье. Это возможно сделать множеством способов, например, задав в вершинах и на серединах сторон девять контрольных точек, причём начальная и конечная вершины должны совпадать в одной из середин. Узловой вектор можно задать в следующем виде: $\left\{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\right\}$. Вес контрольной точки $h_i = 1$, если i — чётное и $h_i = \frac{\sqrt{2}}{2}$, если i — нечётное.

Обычно в пакетах графической разработки для построения рациональных В-сплайнов используются неравномерные представления вектора узлов. Данные сплайны называются «NURBS» (Nonuniform Rational B-splines — неравномерные рациональные В-сплайны). NURBS с 1983 г. являются стандартом IGES. IGES — это стандарт обмена проектной информацией между системами автоматизированного проектирования, а также между ними и системами автоматизированного производства. Рациональные В-сплайны реализованы аппаратно в некоторых графических рабочих станциях.

Распространим понятие NURBS-кривых на NURBS-поверхности, для чего используем декартово произведение:

$$\mathbf{r}(u,v) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} h_{ij}\mathbf{p}_{ij}N_i^k(u)N_j^l(v)}{\sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{j=0}^{m} h_{ij}N_i^k(u)N_j^l(v)}, \qquad (14)$$

где $\mathbf{p}_{ij}$ — векторы задающих точек с компонентами x_{ij}, y_{ij} и z_{ij}, а h_{ij} — однородные координаты задающих точек.

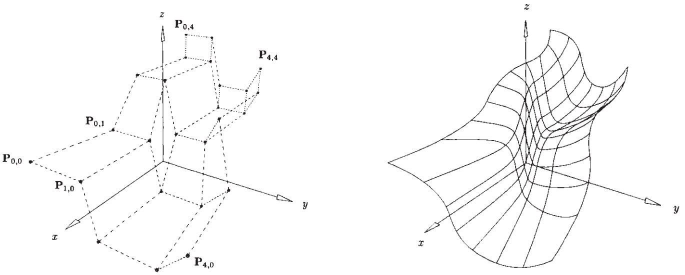


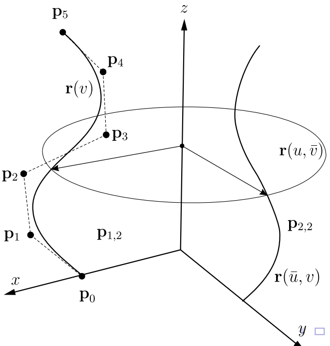
Рис.: Биквадратичная NURBS поверхность, $h_{11} = h_{12} = h_{21} = h_{22} = 10$, остальные веса равны 1. Узловой вектор: $\{0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1\}$

Благодаря общности и гибкости, NURBS-поверхности стали пользоваться популярностью. Поскольку B-сплайновые поверхности являются частным случаем NURBS-поверхностей (при $h_{i,j} = 1$), можно использовать единый алгоритм для создания обширного семейства поверхностей. NURBS поверхности обладают большинством свойств, присущих B-сплайновым поверхностям и NURBS-кривым. NURBS поверхности позволяют точно описывать квадратичные поверхности, такие как цилиндр, конус, сфера, параболоид и гиперболоид. Поэтому дизайнеру вместо инструментария, состоящего из большого числа различных алгоритмов для создания поверхностей, потребуется всего один метод.

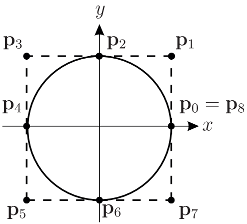
Построение поверхностей вращения

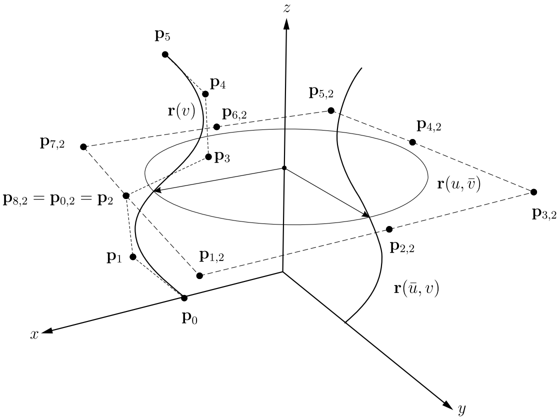
Пусть задана рациональная NURBS-кривая $\mathbf{r}(v) = \sum_{j=0}^{m} R_j^l(v)\mathbf{p}_j$ с вектором узлов $\{v_0, \ldots, v_{n+l+1}\}$. Пусть эта кривая, называемая образующей, вращается вокруг некоторой оси. Рассмотрим случай, когда кривая $\mathbf{r}(v)$ лежит в плоскости xz и поворачивается на угол 360° вокруг оси z. Построим поверхность вращения $\mathbf{r}(u, v)$ со следующими свойствами:

- при фиксированном $u = \bar{u}$, $\mathbf{r}(\bar{u}, v)$ является кривой $\mathbf{r}(v)$, повернутой на некоторый угол вокруг оси z.
- при фиксированном $v = \bar{v}$, $\mathbf{r}(u, \bar{v})$ является окружностью в плоскости xy с центром на оси z.



Построение поверхностей вращения





Воспользуемся представлением окружности с помощью NURBS-кривой, задав в вершинах и на серединах сторон девять контрольных точек с узловым вектором: $\left\{0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, 1, 1, 1\right\}$. Вес контрольной точки $h_i = 1$, если i — чётное и $h_i = \frac{\sqrt{2}}{2}$, если i — нечётное.

Тогда искомая поверхность будет иметь следующий вид:

$$\mathbf{r}(u,v) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{8}\sum\limits_{j=0}^{m} h_{ij}\mathbf{p}_{ij}N_i^2(u)N_j^l(v)}{\sum\limits_{i=0}^{8}\sum\limits_{j=0}^{m} h_{ij}N_i^2(u)N_j^l(v)}. \tag{15}$$

Контрольные точки и веса определяются следующим образом:
для $i=0$: $\mathbf{p}_{ij}=\mathbf{p}_{0j}=\mathbf{p}_j$.
Поскольку $\mathbf{r}(u,\bar{v})$ является окружностью в плоскости xy, все точки $\mathbf{p}_{ij}$ при фиксированном j и $0\leqslant i\leqslant 8$ должны образовывать квадрат, лежащий в плоскости xy с центром на оси z, ширина которого определяется положением контрольной точки $\mathbf{p}_j$. Веса точек получаются с помощью произведений весов образующей кривой h_j и весов окружности h_i, т.е.:
$h_{0,j}=h_j$, $h_{1,j}=(\frac{\sqrt{2}}{2})h_j$, $h_{2,j}=h_j$, $h_{3,j}=(\frac{\sqrt{2}}{2})h_j,\ldots$, $h_{8,j}=h_j$.
По параметру u вектор узлов равен $\left\{0,0,0,\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{4},1,1,1\right\}$, а по параметру v — $\{v_0,\ldots,v_{n+l+1}\}$.