Модуль 1 «Математические модели геометрических объектов» Лекция 5 «Глобальная интерполяция кривых и поверхностей B-сплайнами»

к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,
ауд.: 930а(УЛК)
моб.: 8-910-461-70-04,
email: azaharov@bmstu.ru

31 марта 2022 г.

1 Построение B-сплайновой кривой по заданному набору точек

Предположим, что задан набор точек $\mathbf{q}_k$, $k = 0, \ldots, n$. Воспользуемся для интерполирования нерациональными B-сплайнами p-й степени (рис. 1). Обозначим $\bar{t}_k$ — значения параметрической координаты в каждой точке $\mathbf{q}_k$. Будем предполагать, что параметр $\bar{t} \in [0; 1]$. Зададим вектор узлов $\{t_0, \ldots, t_{n+p+1}\}$. Составим СЛАУ относительно $(n+1)$-неизвестных координат контрольных точек $\mathbf{p}_i$:

$$\mathbf{q}_k = \mathbf{r}\left(\bar{t}_k\right) = \sum_{i=0}^{n} N_i^p(\bar{t}_k)\mathbf{p}_i. \tag{1}$$

Система уравнений (1) имеет одну $(n+1)\times(n+1)$-матрицу коэффициентов с разными правыми частями, соответствующими координатам x, y или z задающих точек $\mathbf{q}_k$.

Попробуем использовать B-сплайны с открытым равномерным нормированным вектором узлов:

$$\begin{gathered} t_0 = \ldots = t_p = 0, \qquad t_{n+1} = \ldots = t_{n+p+1} = 1, \\ t_{j+p} = \frac{j}{n-p+1}, \qquad j = 1, \ldots, n-p. \end{gathered} \tag{2}$$

В этом случае, если выбрать метод параметризации для $\bar{t}_k$ на основе длин хорд или центростремительного метода, то это может привести к СЛАУ с вырожденной матрицей. Поэтому лучше использовать B-сплайны с неравномерным вектором узлов.

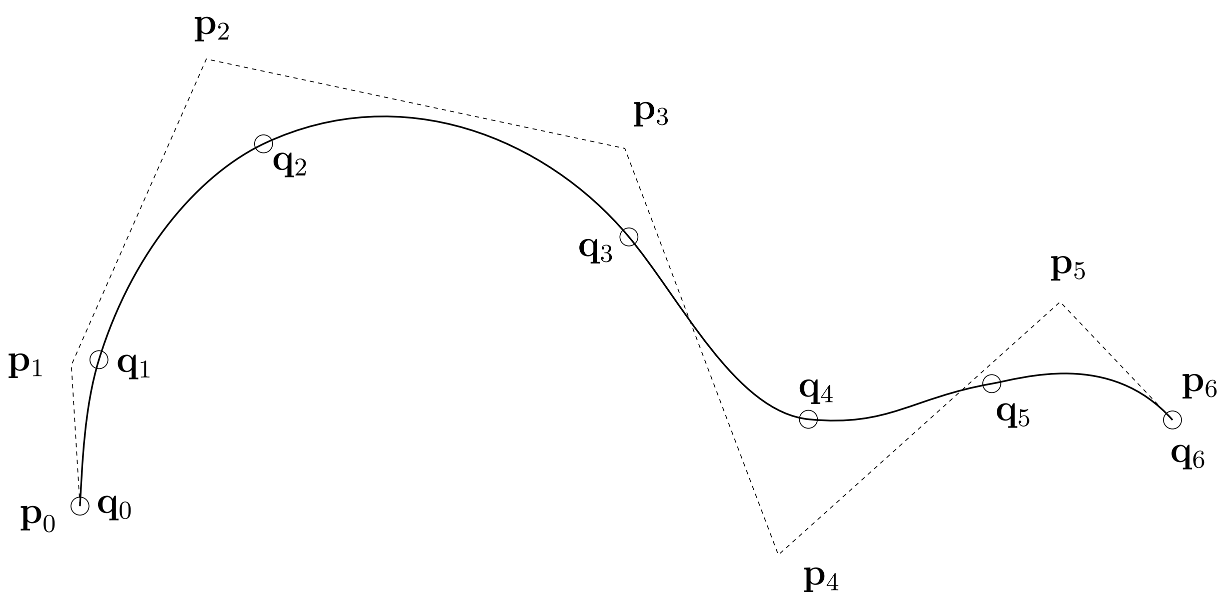


Рис. 1: Построение B-сплайновой кривой по заданному набору точек

Рассмотрим задание узловых значений с использованием осреднения значений $\bar{t}_k$:

$$
\begin{gathered}
t_0 = \ldots = t_p = 0, \qquad t_{n+1} = \ldots = t_{n+p+1} = 1, \\
t_{j+p} = \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} \bar{t}_i, \qquad j = 1, \ldots, n-p.
\end{gathered} \tag{3}
$$

Использование вектора узлов в виде (3) вместе с выбором метода параметризации для $\bar{t}_k$ на основе длин хорд или центростремительного метода, приводит к СЛАУ с положительно определённой ленточной матрицей шириной меньше, чем $2p$, т.е. $N_i^p(\bar{t}_k) = 0$, если $|i-k| \geqslant p$. Таким образом, для её решения можно использовать метод Гаусса без выбора ведущего элемента.

Итак, приведем основные шаги алгоритма построения B-сплайновой интерполяционной кривой по заданному набору точек:

1. Инициализируем параметрические координаты $\bar{t}_k$, соответствующие точкам $\mathbf{q}_k$.
2. Зададим вектор узлов $\{t_0, \ldots, t_{n+p+1}\}$ в виде (3).
3. Вычислим базисные функции для составления матрицы СЛАУ (1).
4. Решим СЛАУ и найдем контрольные точки $\mathbf{p}_i$.

2 Построение B-сплайновой кривой с заданными производными на концах

Если необходимо построить кривую, у которой заданы производные в конечных точках (рис. 2), то в этом случае процесс решения аналогичен предыдущему случаю, за

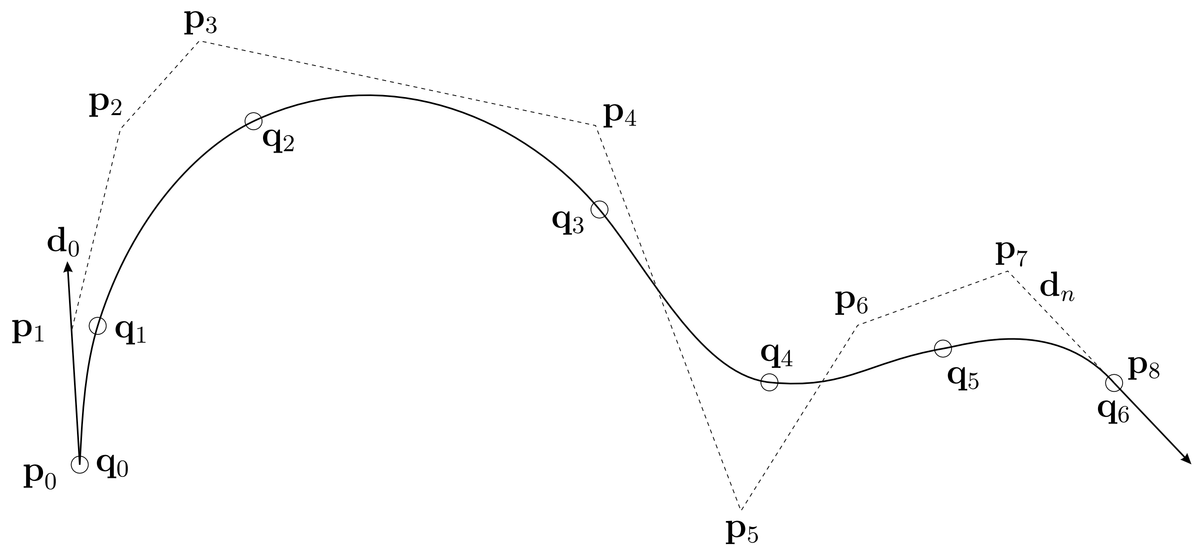


Рис. 2: Построение B-сплайновой кривой с заданными производными на концах

исключением того, что каждая заданная производная увеличивает количество уравнений в (1) и, соответственно, количество неизвестных. Таким образом, нам потребуется ввести ещё две неизвестные контрольные точки и задать два дополнительных узла в векторе узлов.

Пусть снова заданы $\mathbf{q}_k$, $k = 0, \ldots, n$. Предположим, что $\mathbf{d}_0$ и $\mathbf{d}_n$ — заданные производные вектора в начальной и конечной точке кривой, соответственно. Будем интерполировать эти данные B-сплайном p-й степени. Как и прежде, инициализируем параметрические координаты задающих точек $\bar{t}_k$. Зададим вектор узлов $\{t_0, \ldots, t_{n+p+3}\}$ в виде:

$$\begin{gathered} t_0 = \ldots = t_p = 0, \qquad t_{n+3} = \ldots = t_{n+p+3} = 1, \\ t_{j+p+1} = \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} \bar{t}_i, \qquad j = 0, \ldots, n-p+1. \end{gathered} \tag{4}$$

Заметим, что выражения (4) аналогичны уравнениям (3) за исключением того, что мы ввели два дополнительных узла. Запишем теперь $(n+1)$-уравнение вида (1):

$$\mathbf{r}\left(\bar{t}\right) = \sum_{i=0}^{n+2} N_i^p(\bar{t}) \mathbf{p}_i. \tag{5}$$

Вычислив производные B-сплайна в конечных точках, получим два дополнительных условия:

$$-\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 = \frac{t_{p+1}}{p} \mathbf{d}_0, \tag{6}$$

$$-\mathbf{p}_{n+1} + \mathbf{p}_{n+2} = \frac{1 - t_{n+2}}{p} \mathbf{d}_n. \tag{7}$$

Добавим к уравнениям (5) уравнение (6), записав его во второй строке, и уравнение (7), записав его в предпоследней строке, получим $(n+3)$ линейных уравнений с ленточной матрицей.

3 Интерполяция кривой с заданными производными на концах кубическими B-сплайнами

В предыдущем параграфе, мы рассмотрели общий случай, который справедлив для любой выбираемой степени B-сплайна $p > 1$. При $p = 3$ существует более эффективный алгоритм, который использует кубические B-сплайны гладкости C^2. Зададим вектор узлов следующим образом:

$$\begin{gathered} t_0 = \ldots = t_3 = 0, \qquad t_{n+3} = \ldots = t_{n+6} = 1, \\ t_{j+3} = \bar{t}_j, \qquad j = 1, \ldots, n-1. \end{gathered} \tag{8}$$

Другими словами, точки $\mathbf{q}_k$, которые интерполирует кривая, имеют параметрические координаты, совпадающие со значениями в векторе узлов.

Первые два и последние два уравнения получаются, соответственно, в таком виде:

$$\begin{gathered} \mathbf{p}_0 = \mathbf{q}_0, \\ -\mathbf{p}_0 + \mathbf{p}_1 = \frac{t_4}{3}\mathbf{d}_0, \end{gathered} \tag{9}$$

$$\begin{gathered} -\mathbf{p}_{n+1} + \mathbf{p}_{n+2} = \frac{1 - t_{n+2}}{3}\mathbf{d}_n, \\ \mathbf{p}_{n+2} = \mathbf{q}_n. \end{gathered} \tag{10}$$

Запишем систему уравнений для нахождения оставшихся неизвестных. В случае выбора вектора узлов в виде (8) получается, что только три кубических базисных функций во внутренних узлах интерполяции отличны от нуля. Тогда система уравнений имеет такой вид:

$$N_k^3(\bar{t}_k)\mathbf{p}_k + N_{k+1}^3(\bar{t}_k)\mathbf{p}_{k+1} + N_{k+2}^3(\bar{t}_k)\mathbf{p}_{k+2} = \mathbf{q}_k, \qquad k = 1, \ldots, n-1. \tag{11}$$

Полагая

$$a_k = N_k^3(\bar{t}_k), \qquad b_k = N_{k+1}^3(\bar{t}_k), \qquad c_k = N_{k+2}^3(\bar{t}_k);$$

приходим к такой СЛАУ с трёхдиагональной матрицей:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \\ \mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_4}{3}\mathbf{d}_0 + \mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{n-1} \\ \frac{t_{n+2} - 1}{3}\mathbf{d}_n + \mathbf{q}_n \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Эта система может быть решена алгоритмом прогонки.

4 Интерполяция кривой с заданными вторыми производными на концах кубическими B-сплайнами

Пусть нам известны вторые производные в начальной и конечной точке кривой: $\mathbf{d}'_0$ и $\mathbf{d}'_n$. Запишем аналоги уравнений (9), (10) и (12) для этого случая.

Первые два и последние два уравнения можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{q}_0,$$
$$\frac{1}{t_4}\mathbf{p}_0 - \left(\frac{1}{t_4} + \frac{1}{t_5}\right)\mathbf{p}_1 + \frac{1}{t_5}\mathbf{p}_2 = \frac{t_4}{6}\mathbf{d}'_0; \tag{13}$$
$$\frac{1}{1-t_{n+1}}\mathbf{p}_n - \left(\frac{1}{1-t_{n+1}} + \frac{1}{1-t_{n+2}}\right)\mathbf{p}_{n+1} + \frac{1}{1-t_{n+2}}\mathbf{p}_{n+2} = \frac{1-t_{n+1}}{6}\mathbf{d}'_n; \tag{14}$$
$$\mathbf{p}_{n+2} = \mathbf{q}_n.$$

Вводя обозначения:

$$b_0 = -\left(\frac{1}{t_4} + \frac{1}{t_5}\right), \qquad c_0 = \frac{1}{t_5},$$
$$b_n = -\left(\frac{1}{1-t_{n+1}} + \frac{1}{1-t_{n+2}}\right), \qquad a_n = \frac{1}{1-t_{n+1}};$$

приходим к такой СЛАУ с трёхдиагональной матрицей:

$$\begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_n \\ \mathbf{p}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{t_4}{6}\mathbf{d}'_0 - \frac{1}{t_4}\mathbf{q}_0 \\ \mathbf{q}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{q}_{n-1} \\ \frac{1-t_{n+1}}{6}\mathbf{d}'_n - \frac{1}{1-t_{n+2}}\mathbf{q}_n \end{bmatrix}. \tag{15}$$

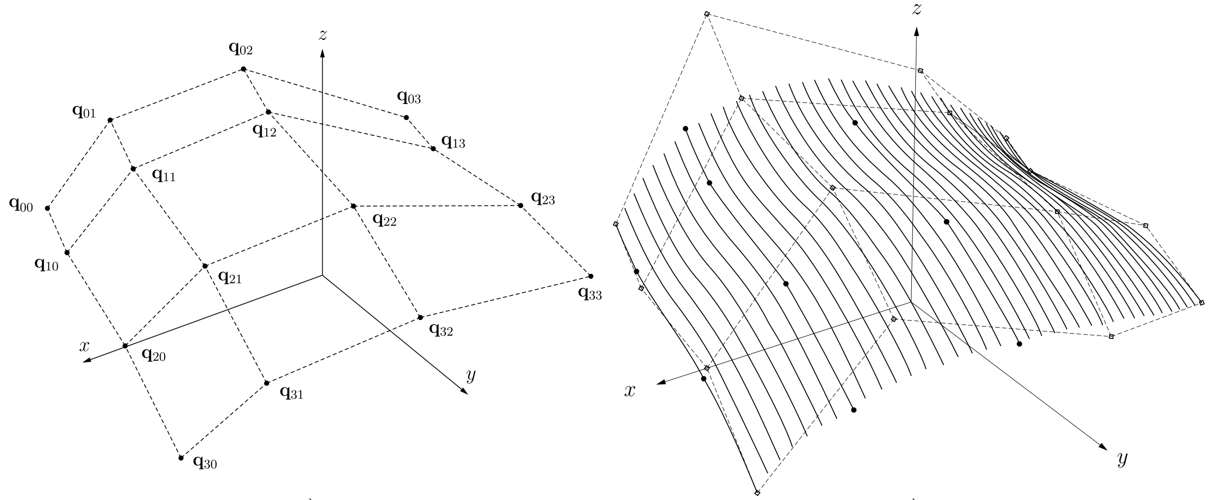
5 Интерполяция поверхности B-сплайнами

Рассмотрим вопрос о глобальной интерполяции поверхностей. Пусть задан набор $(n+1)\times(m+1)$ точек $\mathbf{q}_{kl}$, $k = 0, \dots, n$ и $l = 0, \dots, m$ (рис. 3а). Построим поверхность с помощью нерациональных B-сплайнов (p, q)-степени (рис. 3б), то есть

$$\mathbf{q}_{kl} = \mathbf{r}\left(\bar{u}_k, \bar{v}_l\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} N_i^p\left(\bar{u}_k\right) N_j^q\left(\bar{v}_l\right) \mathbf{p}_{ij}. \tag{16}$$

Мы, как и ранее, должны инициализировать параметрические координаты $\bar{u}_k$ и $\bar{v}_l$. Векторы узлов могут быть получены с использованием выражения (3).

Теперь обратимся к вычислению контрольных точек. Ясно, что выражение (16) представляет собой $(n+1)\times(m+1)$ линейное уравнение относительно неизвестных $\mathbf{p}_{ij}$. Так как $\mathbf{r}\,(u, v)$ — это поверхность, полученная с помощью тензорного произведения,



а) б)

Рис. 3: Интерполяция поверхности: а) задающие точки; б) построенный поверхностный B-сплайн

то величины $\mathbf{p}_{ij}$ можно вычислить достаточно просто и эффективно, с помощью последовательной интерполяции кривых. Действительно, для фиксированного значения l запишем уравнения (16) в таком виде:

$$\mathbf{q}_{kl} = \sum_{i=0}^{n} N_i^p\left(\bar{u}_k\right)\left[\sum_{j=0}^{m} N_j^q\left(\bar{v}_l\right)\mathbf{p}_{ij}\right] = \sum_{i=0}^{n} N_i^p\left(\bar{u}_k\right)\mathbf{r}_{il}, \tag{17}$$

где

$$\mathbf{r}_{il} = \sum_{j=0}^{m} N_j^q\left(\bar{v}_l\right)\mathbf{p}_{ij}. \tag{18}$$

Заметим, что выражение (17) представляет собой задачу интерполяции кривой, проходящей через точки $\mathbf{q}_{kl}$, $k = 0, \ldots, n$.

Величины $\mathbf{r}_{il}$ — контрольные точки кривой $\mathbf{r}(u, v)$ при различных фиксированных значениях $v = v_l$. Далее, фиксируя i и меняя l, получим с помощью выражения (18) интерполяцию кривой, проходящей через точки $\mathbf{r}_{i0}, \ldots, \mathbf{r}_{im}$ с контрольными точками $\mathbf{p}_{i0}, \ldots, \mathbf{p}_{im}$. Таким образом, алгоритм нахождения $\mathbf{p}_{ij}$ будет следующий:

1. Используя $\bar{u}_k$ и вектор узлов $\{u_0, \ldots, u_{n+p+1}\}$, найдем $m+1$ интерполяционных кривых, которые проходят через точки $\mathbf{q}_{0l}, \ldots, \mathbf{q}_{nl}$ (для $l = 0, \ldots, m$). В результате получим $\mathbf{r}_{il}$ (рис. 4а).

2. Используя $\bar{v}_l$ и вектор узлов $\{v_0, \ldots, v_{m+q+1}\}$, найдем $n+1$ интерполяционных кривых, проходящих через точки $\mathbf{r}_{i0}, \ldots, \mathbf{r}_{im}$ (для $i = 0, \ldots, n$). В результате получим $\mathbf{p}_{ij}$ (рис. 4б).

Очевидно, что алгоритм симметричен относительно индексов (i, j). То есть, ту же самую поверхность можно получить с помощью такого алгоритма:

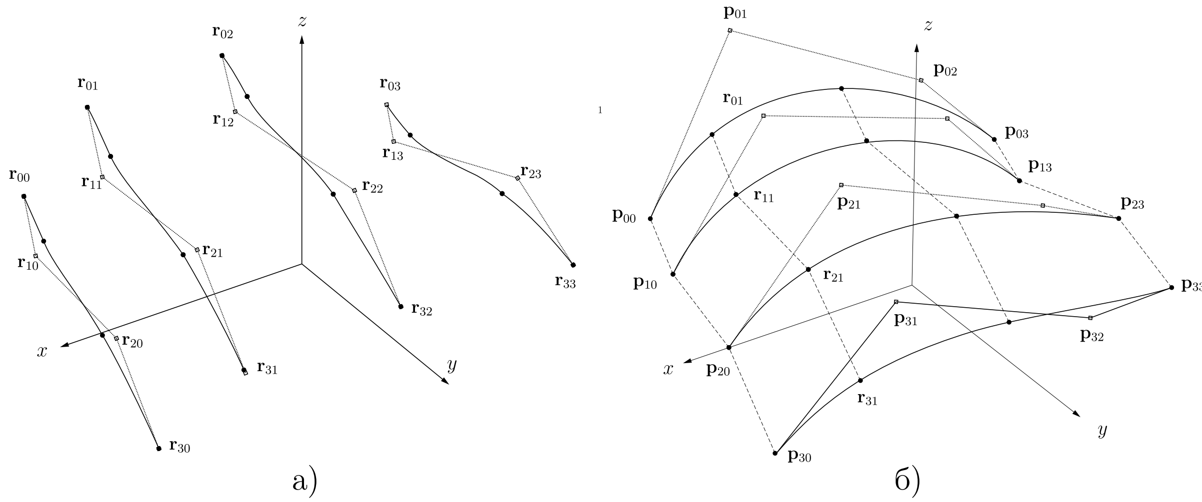


Рис. 4: Последовательная интерполяция кривых: а) интерполяция в u-направлении; б) интерполяция в v-направлении с помощью найденных задающих точек в направлении u

1. Построим $n+1$ интерполяционных кривых через точки $\mathbf{q}_{k0}, \dots, \mathbf{q}_{km}$. Получим $\mathbf{r}_{kj}$ — контрольные точки на поверхности $\mathbf{r}(\bar{u}_k, v)$.

2. Затем проведем $m+1$ интерполяционных кривых через точки $\mathbf{r}_{0j}, \dots, \mathbf{r}_{nj}$ чтобы получить $\mathbf{p}_{ij}$.

Список литературы

[1] Шевелев Ю.Д. Математические основы задач проектирования: Учебное пособие по курсу «Математическое и программное обеспечение САПР». М.: Компания Спутник+, 2005.

[2] Les Piegl, Wayne Tiller. The NURBS Book. 2nd Edition. Springer.