Модуль 2 «Компьютерная графика»
Лекция 7 «Способы построения поверхностных и объёмных геометрий с помощью базовых операций»

к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,
ауд.:930a(УЛК)
моб.: 8-910-461-70-04,
email: azaharov@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана

17 мая 2024 г.

Поверхностное и твердотельное моделирование

В геометрическом моделировании используются термины «поверхностное моделирование» (моделирование поверхностей) и «твердотельное моделирование» (моделирование твёрдых тел). В обоих случаях результатом моделирования является некоторая оболочка (или несколько оболочек), описывающая поверхность моделируемого объекта. Но процесс моделирования в первом случае отличается от процесса моделирования во втором случае.

В поверхностном моделировании сначала создаются и модифицируются требуемым образом поверхности, описывающие отдельные элементы моделируемого объекта. Эти поверхности обрезают по линиям пересечения, сопрягают друг с другом поверхностями скругления или перехода, а также выполняют над ними другие операции. Затем из полученных поверхностей собирают оболочку. В поверхностном моделировании результирующая оболочка не обязательно должна быть замкнутой. Она может отражать лишь часть (главную часть) моделируемого объекта. Поверхностное моделирование позволяет сосредоточить усилия на сложных формах объекта и широко применяется для проектирования кузовов автомобилей и планеров самолетов.

В твердотельном моделировании с самого начала работа идет с оболочками тел, а не с отдельными поверхностями. Оболочки полностью описывают поверхности моделируемых объектов. Оболочки являются замкнутыми и отделяют внутренний объём геометрической модели от остальной части пространства. Процесс построения оболочки тела в данном случае аналогичен процессу изготовления моделируемого объекта. Сначала создаётся оболочка некоторой заготовки простой формы из некоторого набора стандартных элементов. Далее с помощью различных действий оболочка заготовки изменяется необходимым образом. Пакеты объёмного моделирования часто предлагают несколько методов построения. Например, могут использоваться булевы операции над телами, операция построения тонкостенного тела из заготовки, операция скругления ребер, операция построения ребер жесткости и другие операции. С помощью операций оболочке тела придается требуемая форма.

Два подхода к моделированию имеют много общего и отличаются технологией создания модели. В обоих случаях выполняются аналогичные действия, но в разной последовательности.

Требования к способам описания объёмной геометрии:

- математическая модель твердотельной геометрии должна отличаться высокой универсальностью, достаточной для описания различных физических объектов;
- модель должна обладать свойством однозначности. Это значит, что каждая трёхмерная форма получает единственное описание в терминах данной модели. Если требование однозначности обеспечено, то задача проверки эквивалентности формы двух объектов решается намного проще, чем для многозначных моделей;
- модель должна быть точной. Многие векторные редакторы используют ломанные линии для приближённого представления кривых. В системах автоматизированного проектирования сложные трёхмерные объекты часто описываются сочетанием простых геометрических форм. Все это примеры неточных геометрических описаний, в которых используются аппроксимация двумерных или трёхмерных оригиналов.
- описание должно корректно реагировать на типовые операции по преобразованию формы и положения объекта. К числу таких операций относятся прежде всего перемещение, поворот и масштабирование;
- описание должно быть компактным.

Способы описания объёмной геометрии

Специалистам в области геометрического моделирования не известна модель, которая отвечала бы всем перечисленным требованиям. Все способы описания объёмной геометрии, применяемые в настоящее время, представляют разработчикам и пользователям некоторый компромисс при выполнении отдельных критериев приведённого перечня.

Пространственное разбиение (spatial-partitioning) — это представление трёхмерных объектов в виде совокупности непересекающихся элементарных пространственных форм — примитивов. Примитивы выполняют функции геометрических строительных элементов и могут различаться типом, параметризацией, размерами, пространственной ориентацией и другими свойствами формы, положения и описания. Множество операций обычно ограничивается упрощённым булевским объединением объектов, которое состоит в обработке непересекающихся операндов или операндов, имеющих общую вершину, ребро или грань. Подобные операции называются склеиванием.

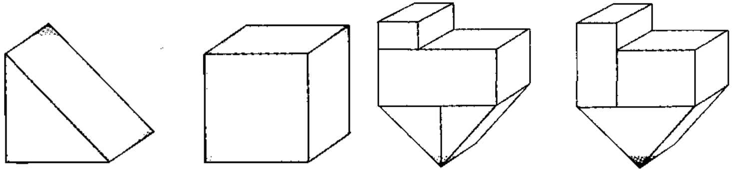
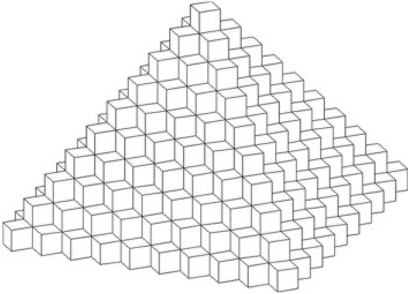


Рис.: Представление трёхмерного тела в виде композиции геометрических примитивов является вполне однозначным, однако обратный переход от формы к набору элементов не обладает этим свойством. Трёхмерное тело можно получить различными вариантами склейки параметризованных геометрических примитивов: призмы и параллелепипеда.

Воксельное описание

Воксельное описание является частным случаем модели пространственного разбиения, в которой элементами пространственной формы являются одинаковые примитивы, расположенные в узлах регулярной сетки. В этой модели примитивы выполняют функции неделимых, непараметризуемых элементов трёхмерных форм и по аналогии с двухмерной растровой графикой, где функции графических атомов выполняют пикселы, называются вокселами (*voxels, volume elements*). Для описания трёхмерной формы в этой модели следует принять решение о наличии или отсутствии элементов на позициях регулярной сетки. Это даёт точное и единственное представление формы пространственного тела.



Воксельное описание

Рассмотрим пример воксельного представления шара радиуса 5 с центром в начале координат. Пусть размер вокселя составляет $1 \times 1 \times 1$. Центр каждого вокселя имеет целочисленные координаты. Определим, принадлежат ли шару воксели: $[2, 4, 2]^T$, $[2, 3, 3]^T$ и $[0, 5, 1]^T$.
Воксель принадлежит шару, если расстояние от его центра до центра шара меньше или равно радиусу шара:

$$\sqrt{(2-0)^2 + (4-0)^2 + (2-0)^2} = 2\sqrt{6} = 4.899 \leqslant 5 \Longrightarrow \text{принадлежит},$$
$$\sqrt{(2-0)^2 + (3-0)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{22} = 4.6904 \leqslant 5 \Longrightarrow \text{принадлежит},$$
$$\sqrt{(0-0)^2 + (5-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{26} = 5.099 > 5 \Longrightarrow \text{не принадлежит}.$$

Можно определить принадлежность вокселя шару, если подставить его координаты в уравнение поверхности сферы:

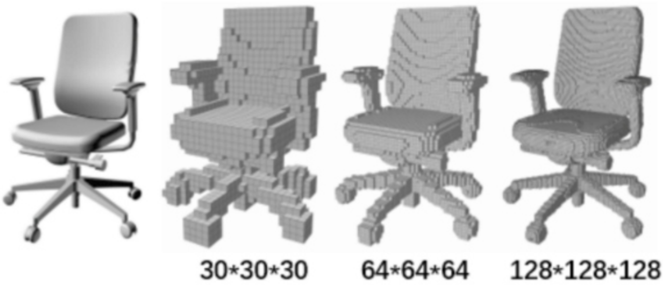
$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Тогда:

$$2^2 + 4^2 + 2^2 - 5^2 = -1 \leqslant 0 \Longrightarrow \text{принадлежит},$$
$$2^2 + 3^2 + 3^2 - 5^2 = -3 \leqslant 0 \Longrightarrow \text{принадлежит},$$
$$0^2 + 5^2 + 1^2 - 52 = +1 > 0 \Longrightarrow \text{не принадлежит}.$$

Воксельное описание

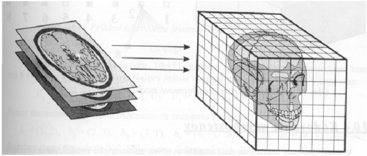
Воксельная модель отличается предельной простотой определения, элементарное решение в этой модели имеет проблема пересечения двух тел. Для воксельной модели просто рассчитать такие важные для любого технического объекта параметры, как масса и момент инерции. Они находятся простым сложением соответствующих параметров отдельных примитивов. Воксельная модель описывает геометрию объёмного тела и при этом автоматически определяет часть пространства, расположенную за пределами объекта, что позволяет использовать данное описание для моделирования и расчёта тел с полостями.

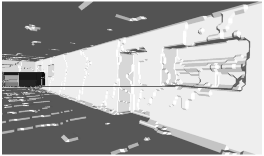


Воксельное описание

В большинстве случаев примитивами воксельной модели являются кубы небольшого размера. Сетка, составленная из таких ячеек, не даёт точного описания многих трёхмерных форм со сложными криволинейными оболочками. Для получения приемлемой аппроксимации необходимо уменьшить размеры примитивов и увеличивать их количество. Если размерность воксельной сетки равна n, то для описания геометрии может потребоваться вплоть до n^3 примитивов. С ростом размерности это число увеличивается очень быстро, что может привести к перерасходу вычислительных ресурсов, прежде всего оперативной памяти.

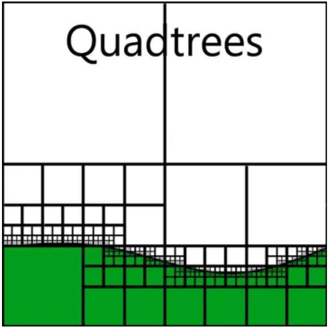
Системы, основанные на воксельном описании, нашли широкое применение в биомедицинских приложениях — с их помощью представляются трёхмерные сканы, полученные компьютерными томографами, и в других приложениях, требующих отображения поперечных сечений объектов. Применяется они и для формализации среды в задачах моделирования поведения роботов и манипуляторов.





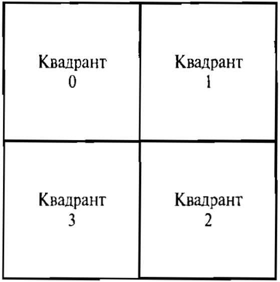
Квадратичные деревья (квадродеревья, quadtrees)

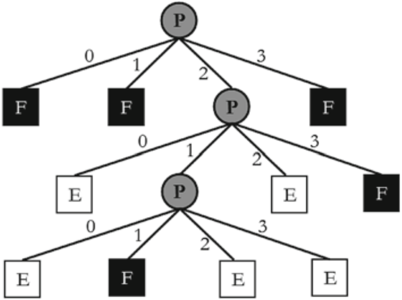
Один из способов экономичного представления растровых изображений основывается на методе квадратичных деревьев. Квадратичные деревья описывают процедуру последовательного деления двумерной области (обычно квадрата) на квадранты.
Квадрант, закрашенный полностью, будем обозначать буквой F (full), закрашенный частично — P (partial), а свободный от закраски — E (empty). В случае частично окрашенных квадратнов, рекурсивно продолжаем его разделение пока все образовавшиеся квадранты не будут полностью закрашены или свободны от закраски или пока не будет достигнут минимальный размер квадранта.



Квадратичные деревья (квадродеревья, quadtrees)

Процедуру разбиения растрового изображения на квадранты принято представлять в виде квадратичного дерева. Его вершиной является исходное изображение, а листьями служат закрашенные или свободные от закраски квадранты.
Квадранты могут нумероваться в порядке от 0 до 3 или обозначаться в соответствии с их расположением как SW (south west), SE (south east), NW (north west) и NE (north east). Порядок деления сохраняется на всех этапах деления растрового изображения. Именно в этом порядке записываются вершины квадратичного дерева.



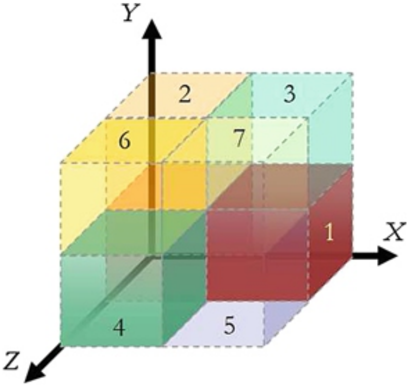


Квадратичные деревья (квадродеревья, quadtrees)

Использование квадратичных деревьев позволяет заметно экономить ресурсы вычислительной системы достигая того же самого качества изображения. Тем не менее растровые изображения высокой размерности для своего описания могут потребовать очень больших квадратичных деревьев. Исследователями в области компьютерной графики предложено несколько способов сокращения их размеров. Один из возможных подходов состоит в аппроксимации квадрантов с частичным заполнением. В большинстве практических ситуаций область со значительным преобладанием заполненных ячеек можно считать полной, и наоборот, квадрант, имеющий небольшое заполнение, рассматривается как пустой. Принять решение о квадрантах с частичным заполнением позволяют пороговые значения плотностей.

Восьмиричные деревья (октодеревья, octrees)

Описанный подход можно распространить и на пространственные изображения. Дискретное трёхмерное пространство подвергается последовательному делению на октанты. Для описания процедуры пространственной декомпозиции используются так называемые восьмеричные, или октантные, деревья. Корнем восьмеричного дерева служит исходное трехмерное изображение, а его листьями являются целиком заполненные или пустые октанты.



Бинарные деревья (bintrees)

Вместо деления вдоль всех трёх пространственных направлений на каждом шаге построения октодерева, бинарное дерево делит область только вдоль одного направления на каждом шаге.

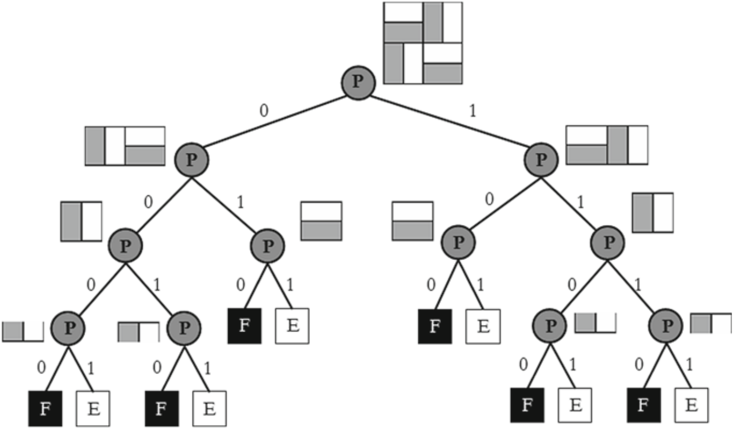
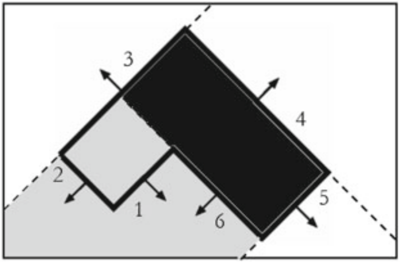
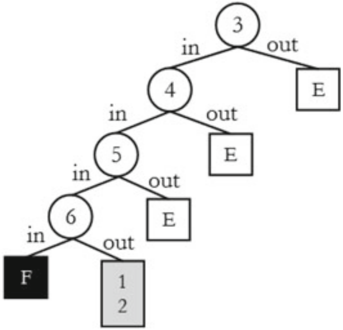


Рис.: Разделение происходит рекурсивно сначала горизонтальной линией, затем вертикальной

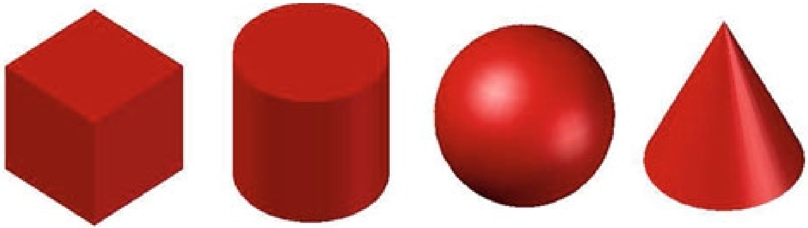
BSP-деревья

Деревья бинарного разделения пространства (binary space-partitioning — BSP) являются обобщением бинарных деревьев, когда на каждом этапе сцена делится на два участка плоскостью, которая может проходить через любую точку и иметь любую ориентацию. Адаптивное деление пространства с помощью BSP-деревьев может быть более эффективным, поскольку разрезающие плоскости располагаются где угодно и ориентированы как угодно согласно пространственному расположению объектов. Это может уменьшить глубину дерева, предоставляющего сцену, а следовательно, сократить время.

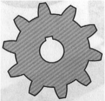




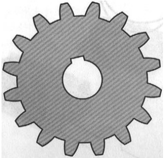
Метод конструктивной стереометрии (*Constructive Solid Geometry — CSG*) — это метод построения нового объекта из простейших трёхмерных объектов с использованием геометрических преобразований и операций над множествами. Простейшие твёрдые тела, используемые для 3D-моделирования, называются *элементарными телами* или *примитивами*. К ним могут относиться, например, призмы, цилиндры, конусы, сферы и торы. После создания примитива к нему можно применить различные аффинные преобразования. С помощью элементарных тел можно моделировать большинство промышленных деталей.



Примитивы, у которых зафиксированы все геометрические и конструктивные параметры, имеют ограниченную область применения, поэтому в геометрическом моделировании используются параметризованные примитивы. Например, сфера создаётся путём задания местоположения её центральной точки и радиуса. Если примитивом будет пирамида, то кроме её геометрических размеров и положения, возможно также определять число её граней. Параметризация примитивов часто применяется для определения таких сравнительно сложных объектов, как болты, гайки, зубчатые колеса и т. п.



а)

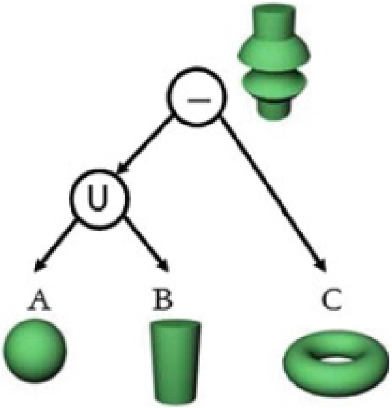


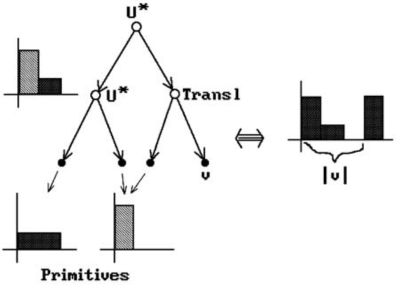
б)

Рис.: Параметризованное зубчатое колесо: а) — диаметр — 40, толщина — 10, отверстие — 10, число зубьев — 10; б) —диаметр — 60, толщина — 20, отверстие — 15, число зубьев — 16

Операции над телами

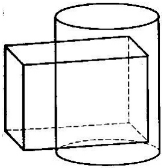
Построение модели CSG имеет естественно связанную иерархию составных объектов. Эта иерархия представлена бинарной древовидной структурой, называемой CSG-деревом. Окончательная модель находится в корне дерева, а примитивы — в листьях. Дерево имеет два типа промежуточных узлов: узлы операций и узлы геометрических моделей.



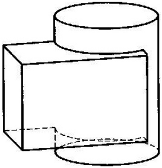


Булевы операции над телами

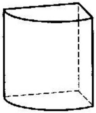
Одними из основных операций для двух тел являются булевы операции. *Булевыми операциями* в геометрическом моделировании называются операции *пересечения*, *объединения* и *вычитания* множеств точек двух тел.
В порядке следования тел-операндов будем называть их *первым телом* и *вторым телом*. Результатом операции *объединения* двух тел является тело, которое содержит точки, принадлежащие или первому, или второму телу. Результатом операции *пересечения* двух тел является тело, которое содержит точки, принадлежащие и первому и второму телу. Результатом операции *вычитания* двух тел является тело, которое содержит точки, принадлежащие первому телу и не располагающиеся внутри второго тела. Последняя операция не является коммутативной.



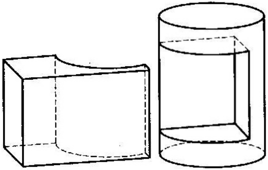
а) Исходные тела



б) Объединение тел



в) Пересечение тел



г) Вычитание тел

Рис.: Булевы операции

Пересекающиеся ребра

Наиболее трудоемким и требующим определённой точности в процессе выполнения булевых операций является построение ребер пересечения. Ребра пересечения должны обязательно стыковаться или друг с другом, или со старыми ребрами граней в вершинах.

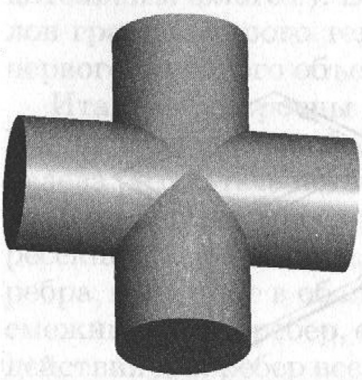


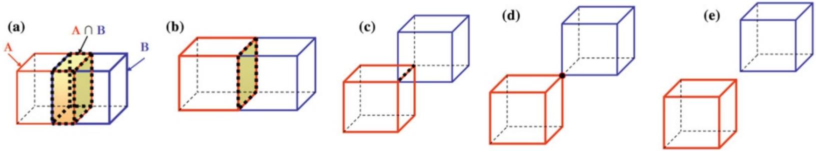
Рис.: Два цилиндрических тела одинакового диаметра, оси которых пересекаются. В точках касания цилиндров должны располагаться вершины

Регуляризованные булевы операции над телами

В результате применения обычных булевых операций к объёмным телам не обязательно получаются объёмные тела. Для исключения таких результатов вводятся регуляризованные булевы операторы, которые обозначаются как $\bigcup^*$, $\bigcap^*$ и $-^*$, и в результате применения которых всегда получаются твёрдые тела. Например, регуляризованное булево пересечение объектов, показанных на рисунке, совпадает с их обычным булевым пересечением в случаях (a) и (e), но пусто в (b)–(d). Регуляризованный булев оператор можно определить с помощью обычного булевого оператора как

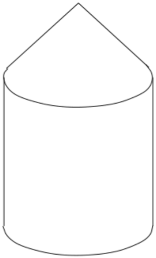
$$A\ op^*\, B = \text{closure}(\text{interior}(A\ op\ B)),$$

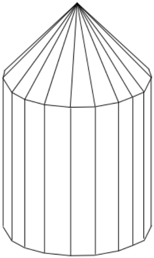
(12.1) где *op* — один из операторов $\bigcup$, $\bigcap$ или $-$.

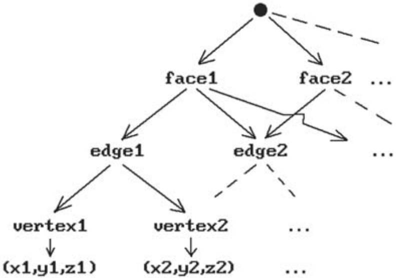


Граничное представление

Граничным представлением (Boundary Representation, B-rep) называется описание пространственных тел в терминах границ и их элементов. Это представление, может, например, использовать приблизительное описание геометрии при помощи самой простой аппроксимации границы — фрагментами плоскостей (линейными уравнениями). Существуют графические форматы, которые хранят все описания объектов именно в форме наборов многоугольных поверхностей. Чаще всего такими поверхностями являются треугольники или четырёхугольники.
Это представление, вероятно, является наиболее распространённым представлением, используемым в компьютерной графике.







Граничное представление

В графических системах используются быстрые аппаратные реализации схем визуализации с помощью многоугольников, что позволяет отображать миллион или даже больше затенённых многоугольников (обычно треугольников) за секунду, включая наложение текстуры на поверхность и применение специальных эффектов освещения. Сплайновые поверхности обычно преобразуются в многоугольные представления с целью обработки в конвейере наблюдения. Для полигональных сеток достаточно просто решается задача поиска линий пересечения.
Чтобы описать объект как набор многоугольных граней, нужно указать координаты вершин всех многоугольных участков поверхности объекта. Затем для каждого многоугольника координаты вершин, ребер и элементов записываются в таблицы вместе с информацией о векторе нормали к поверхности.

Тела движения

Многие модели или заготовки для них можно получить с помощью заметания (sweeping), т.е. путём движения кривой по заданной траектории. Такие объекты обладают трансляционной, вращательной или другой симметрией. Пусть траектория движения описывается кривой $\mathbf{g}(t)$, которую будем называть *направляющей*. Движущуюся по траектории кривую линию будем называть *образующей* кривой. Направляющая кривая и образующая кривая не должны иметь точек самопересечения. Набор таких двумерных примитивов, как окружности и прямоугольники, может предлагаться в качестве образующих как пункты меню. Существуют и другие методы получения двумерных фигур, например, построение замкнутых сплайновых кривых.

Если образующая кривая не замкнута, то на её основе в общем случае нельзя построить тело. Обычно из незамкнутой кривой создаётся замкнутая составная кривая путём «придания ей толщины» с помощью эквидистантных кривых. В общем случае образующая представляет собой замкнутую составную фигуру. Если образующая является плоской кривой, то можно построить тело с плоскими торцами.

В популярной системе трёхмерной графики 3Ds Max заметание называется Loft, в описаниях пакета на русском языке его именуют лофтингом.

Если направляющей кривой служит отрезок прямой $\mathbf{g}(t) = (1-t)\mathbf{p}_1 + t\mathbf{p}_2$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, то мы получим тело выдавливания. Во многих пакетах машинной графики данный метод формообразования называют выдавливанием (extrude). Экструдирование позволяет получить множество трехмерных форм, описывающих машиностроительные детали, элементы архитектурных конструкций, предметы интерьера и т. п.

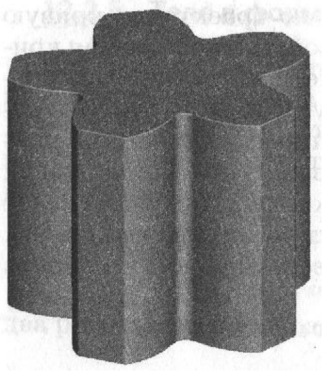


Рис.: Тело выдавливания, построенное по замкнутой составной кривой

Тело сдвига

Тела сдвига получаются при плоскопараллельном движении образующей кривой вдоль незамкнутой направляющей кривой. Тело сдвига всегда имеет торцевые грани.

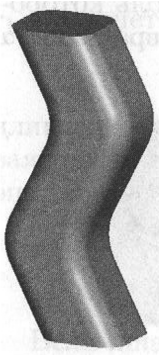
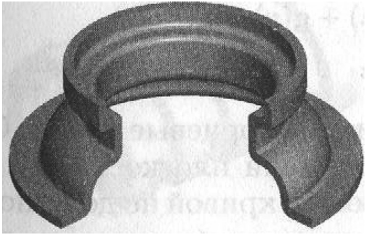


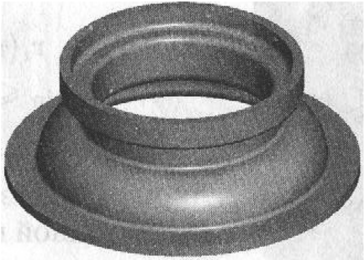
Рис.: Тело сдвига

Тело вращения

Если направляющей кривой движения служит окружность или её дуга, то мы получим тело вращения. Ось вращения не должна пересекать боковые грани. Если угол вращения равен 2π, то оболочка тела имеет топологию тора, в противном случае — топологию призмы. В первом случае оболочка не имеет торцевых граней.



а) с топологией призмы



б) с топологией тора

Рис.: Тела вращения

В англоязычной литературе этот способ называется rotational sweeping (3Ds Max — Lathe), что обычно переводят как заметание вращением.

Тело вращения

Пусть в плоскости xz задана кривая $\mathbf{c}(v) = (x(v), z(v))$. Для создания поверхности вращения повернём эту кривую вокруг оси z, изменяя параметр u, где u определяет угол, под которым каждая точка повернута относительно оси. Различные положения кривой $\mathbf{c}$ вокруг оси называются меридианами. Когда точка $(x(v), 0, z(v))$ поворачивается на u радиан, она становится точкой $(x(v)\cos(u), x(v)\sin(u), z(v))$. Полный поворот кривой образует полный круг, следовательно, контуры при постоянном v являются окружностями, которые называются параллелями этой поверхности. Параллель для каждого значения v имеет радиус $x(v)$ и располагается на высоте $z(v)$ над плоскостью xy. Тогда произвольная точка поверхности задаётся выражением:

$$\mathbf{r}(u, v) = (x(v)\cos(u), x(v)\sin(u), z(v)) \, .$$

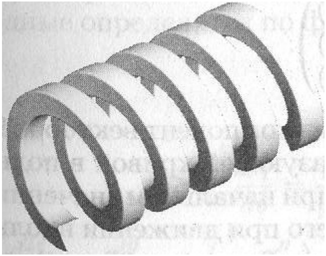
Нормальный вектор к поверхности вращения имеет вид:

$$\mathbf{n}(u, v) = (\dot{z}(v)\cos(u), \dot{z}(v)\sin(u), -\dot{x}(v)) \, ,$$

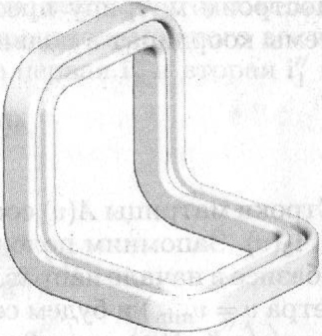
где точка означает первую производную функции. Данный вектор имеет неединичную длину и его необходимо нормировать.

Кинематическое тело

Кинематическое тело представляет собой обобщение тел выдавливания и вращения для произвольной направляющей. Кинематическое тело получим путём движения плоской замкнутой образующей вдоль произвольной направляющей кривой при сохранении угла между плоскостью образующей и касательным вектором $\dot{\mathbf{g}}(t)$ направляющей в текущей точке.



а) с топологией призмы



б) с топологией тора

Рис.: Кинематические тела

Кинематическое тело

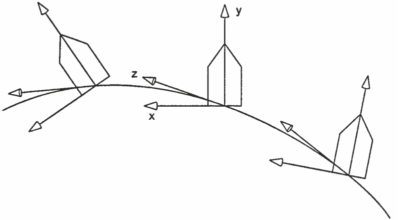
Для выполнения этого условия в каждой точке вдоль направляющей создаётся *базис (репер) Френе* (*Frenet frame*). Для каждого значения t вычисляется *единичный касательный вектор* (*unit tangent vector*) $\dot{\mathbf{g}}(t)$ к кривой. Сформируем векторное произведение $\mathbf{b}(t) = \dot{\mathbf{g}}(t) \times \ddot{\mathbf{g}}(t)$ и также нормируем его. Получим *единичный вектор бинормали* (*unit binormal vector*):

$$\mathbf{b}(t) = \frac{\dot{\mathbf{g}}(t) \times \ddot{\mathbf{g}}(t)}{|\dot{\mathbf{g}}(t) \times \ddot{\mathbf{g}}(t)|}.$$

Затем с помощью ещё одного векторного произведения получим вектор, перпендикулярный к векторам $\dot{\mathbf{g}}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$:

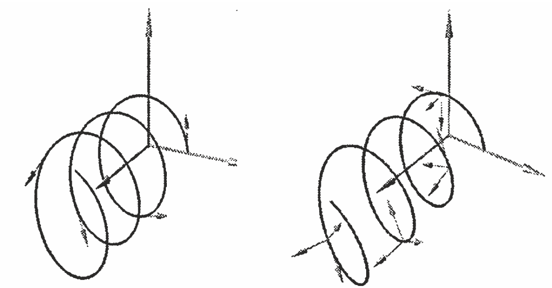
$$\mathbf{n}(t) = \mathbf{b}(t) \times \dot{\mathbf{g}}(t).$$

Три взаимно перпендикулярных единичных вектора $\dot{\mathbf{g}}(t)$, $\mathbf{n}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$ образуют базис Френе, соответствующий значению t.



Когда базис Френе вычислен, нетрудно найти матрицу преобразования $\mathbf{M}$, которая переводит образующую тела вращения в систему координат, связанную с данным базисом. Матрица должна переводить базисные векторы мировой системы координат $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ соответственно в векторы $\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{b}(t)$, $\dot{\mathbf{g}}(t)$ и должна перемещать начало координат в точку на направляющей $\mathbf{g}(t)$. Поэтому матрица содержит столбцы, представляющие собой векторы $\mathbf{n}(t)$, $\mathbf{b}(t)$, $\dot{\mathbf{g}}(t)$ и вектор трансляции с координатами $\mathbf{g}(t)$:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} n_x & b_x & \dot{g}_x & g_x \\ n_y & b_y & \dot{g}_y & g_y \\ n_z & b_z & \dot{g}_z & g_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

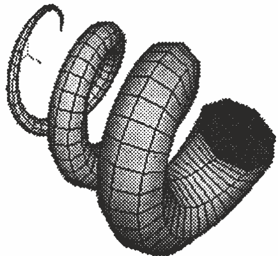


Аффинное преобразование образующей

Множество кинематических тел можно расширить если допустить возможность аффинного преобразования образующей при движении вдоль направляющей кривой. Аффинное преобразование задаётся с помощью матрицы $\mathbf{M}$. На рис. показана «морская раковина», образующая которой умножается на матрицу масштабирования:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} \begin{bmatrix} s(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

где масштабные множители в матрице зависят от t. На рис. показан случай когда $s(t) = t$. Можно также добавить к матрице поворот, и тогда труба будет закручиваться ещё сильнее.



Заметание — естественный способ генерации трёхмерных форм. Он допускает простое управление и даёт предсказуемые результаты. Однако его изобразительные возможности не безграничны, существуют трёхмерные объекты, которые нельзя создать движением образующих. Формообразование можно существенно расширить, если допустить использование нескольких образующих, связанных с одной траекторией.

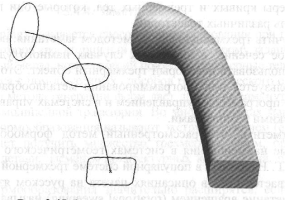
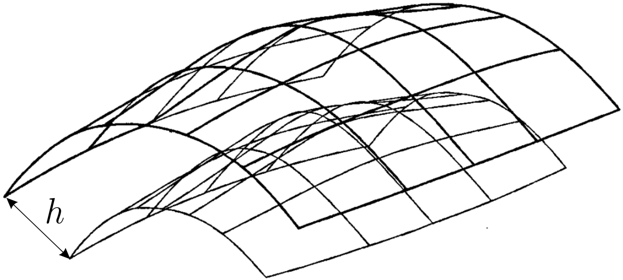


Рис.: Заметание с тремя образующими вдоль одной кривой

В некоторых пакетах машинной графики этот способ формообразования считается самостоятельным и называется скиннингом (skinning). Кроме того, можно допустить изменение ориентации поперечного сечения на пути заметания (при перемещении формы по области пространства).

Эквидистантное тело

По телу можно построить другое тело, все грани которого расположены на заданном расстоянии по нормали от поверхности исходного тела. Это расстояние назовем *параметром эквидистанты* и обозначим h. Тело, по которому строится новое тело, назовем *базовым*, а новое тело — *эквидистантным*. Параметр эквидистанты этой операции может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Если $h > 0$, то базовое тело располагается внутри эквидистантного тела. Если $h < 0$, то эквидистантное тело располагается внутри базового тела. Недопустимыми значениями параметра являются такие значения, при которых оболочка нового тела получается самопересекающейся или вырожденной.



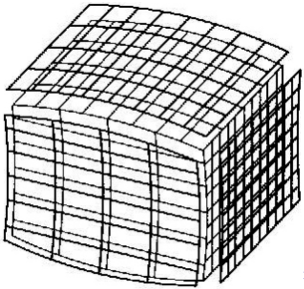
Эквидистантное тело

Процесс создания нового тела основывается на построении эквидистантной грани для каждой грани базового тела. Эквидистантная грань базируется на поверхности, эквидистантной к соответствующей поверхности базового тела. Радиус-вектор эквидистантной поверхности определяется формулой

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{b}(u, v) + h\mathbf{n}(u, v),$$

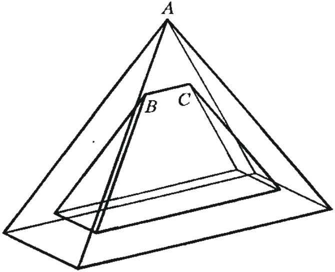
где $\mathbf{b}(u, v)$ — радиус-вектор базовой поверхности, $\mathbf{n}(u, v)$ — нормаль базовой поверхности.

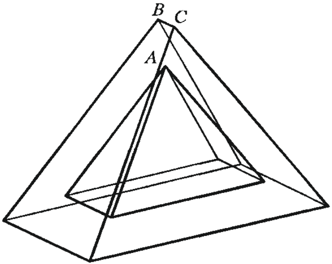
При необходимости каждая эквидистантная поверхность должна быть продолжена по касательной на ближайшей границе до пересечения с соседними эквидистантными поверхностями.



Эквидистантное тело

Заметим, что топология эквидистантного тела (количество вершин, ребер, граней и их взаимосвязь) не всегда совпадает с топологией базового тела. Если в вершине базового тела стыкуется более трёх ребер, то в эквидистантном теле этой вершине будет соответствовать несколько новых вершин и ребер.





Тело в форме листа

На основе поверхности произвольной формы можно построить тело в форме листа конечной толщины. Пусть дана поверхность $\mathbf{b}(u,v)$. Выбрав толщину листа h, построим эквидистантную к ней поверхность

$$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{b}(u,v) + h\mathbf{n}(u,v),$$

где $\mathbf{n}(u,v)$ — нормаль к поверхности $\mathbf{b}(u,v)$. Боковые грани тела построим на основе линейчатых поверхностей, одной базовой линией которых является граничная линия на поверхности $\mathbf{b}(u,v)$, а второй — соответствующая ей линия на поверхности $\mathbf{r}(u,v)$.
С помощью тел в форме листа можно моделировать детали кузова автомобиля и планера самолета. В структуре данных тела достаточно иметь базовую поверхность $\mathbf{b}(u,v)$ и толщину тела h.