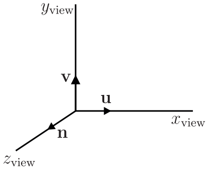
Модуль 2 «Математические методы, модели и алгоритмы компьютерной геометрии»
Лекция 9 «Матрицы преобразований конвейера наблюдения»

к.ф.-м.н., доц. каф. ФН-11, Захаров Андрей Алексеевич,
ауд.: 930а(УЛК)
моб.: 8-910-461-70-04,
email: azaharov@bmstu.ru

МГТУ им. Н.Э. Баумана

7 ноября 2023 г.

Базовые векторы системы наблюдения **uvn**



Поскольку нормаль к плоскости наблюдения $\mathbf{N}$ определяет направление оси z_{view}, а вектор верха $\mathbf{V}$ используется для получения направления оси y_{view}, то остаётся определить только направление оси x_{view}. Используя входные значения $\mathbf{N}$ и $\mathbf{V}$, можно вычислить третий вектор $\mathbf{U}$, перпендикулярный $\mathbf{N}$ и $\mathbf{V}$:

$$\mathbf{U} = \mathbf{V} \times \mathbf{N}.$$

Вектор верха $\mathbf{V}$, который задаёт пользователь, обычно не перпендикулярен вектору $\mathbf{N}$. Поэтому его также необходимо скорректировать следующим образом:

$$\mathbf{V} = \mathbf{N} \times \mathbf{U}.$$

В итоге получаем следующий набор единичных осевых векторов правосторонней системы наблюдения:

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{U}}{|\mathbf{U}|} = (u_x, u_y, u_z), \qquad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{V}}{|\mathbf{V}|} = (v_x, v_y, v_z), \qquad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = (n_x, n_y, n_z). \quad (1)$$

Преобразование из внешних координат в координаты наблюдения в 3D

В трёхмерном конвейере наблюдения первым действием после построения сцены является перенос описаний объектов в систему координат наблюдения. Это преобразование описаний объектов эквивалентно последовательности преобразований, совмещающих систему координат наблюдения с внешней системой координат, и состоит из

1. Трансляции начала системы координат наблюдения в начало внешней системы координат.
2. Поворотов, совмещающих оси x_{view}, y_{view} и z_{view} с осями x, y и z внешней системы координат соответственно.

Начало системы координат наблюдения находится в точке с внешними координатами $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Следовательно, матрица трансляции начала системы координат наблюдения в начало внешней системы координат выглядит так:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_0 \\ 0 & 1 & 0 & -y_0 \\ 0 & 0 & 1 & -z_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Преобразование из внешних координат в координаты наблюдения в 3D

В преобразовании поворота можно с помощью единичных векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$ сформировать сложную матрицу поворота, совмещающую оси системы координат наблюдения с осями внешней системы координат. Данная матрица преобразования записывается следующим образом:

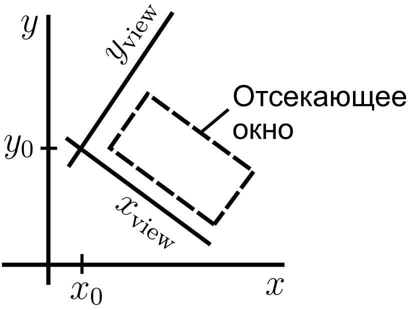
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & 0 \\ v_x & v_y & v_z & 0 \\ n_x & n_y & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

где элементы матрицы $\mathbf{R}$ — это компоненты осевых векторов $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ и $\mathbf{n}$. Матрица преобразования координат получается умножением приведённых выше матриц трансляции и поворота:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} u_x & u_y & u_z & -\mathbf{u} \cdot \mathbf{P}_0 \\ v_x & v_y & v_z & -\mathbf{v} \cdot \mathbf{P}_0 \\ n_x & n_y & n_z & -\mathbf{n} \cdot \mathbf{P}_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Матрица (4) переводит описания объектов из внешней системы координат в систему координат наблюдения.

Наблюдение в 2D-случае



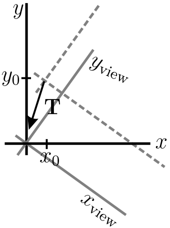
Начало двухмерной системы координат наблюдения выбирается в некоторой точке внешней системы координат $\mathbf{P}_0 = (x_0, y_0)$, а ориентацию можно задать, используя вектор $\mathbf{V}$, который определяет направление оси y_{view}. Вектор $\mathbf{V}$ называется двухмерным вектором верха (view up vector). После установки параметров наблюдения, описание сцены переводится в систему координат наблюдения. Это включает ряд преобразований и эквивалентно наложению системы координат наблюдения на внешнюю систему координат.

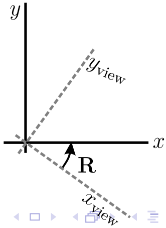
Преобразование из внешних координат в координаты наблюдения в 2D

Первый этап в последовательности преобразований — транслировать начало координат системы наблюдения в начало внешней системы координат. Затем нужно повернуть систему координат наблюдения, чтобы совместить её с внешней системой координат. Для данного вектора ориентации $\mathbf{V}$ нужно вычислить компоненты единичных векторов $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$ и $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ для осей y_{view} и x_{view} соответственно. Они используются для формирования первой и второй строки матрицы вращения $\mathbf{R}$, которая поворачивает систему координат наблюдения до её совмещения с внешней системой координат.
Матрица сложного двухмерного преобразования имеет вид:

$$\mathbf{M} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{T}, \qquad (5)$$

где $\mathbf{T}$ — матрица трансляции, переносящая начало координат системы наблюдения $\mathbf{P}_0$ в начало внешней системы координат.

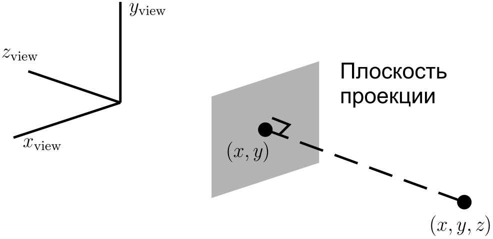




Преобразования проектирования

На следующем этапе трёхмерного конвейера наблюдения (после перехода к координатам наблюдения) описания объектов проецируются на плоскость наблюдения. Как правило, графические библиотеки поддерживают и параллельную, и перспективную проекцию.

Координаты ортогональной проекции



Когда направление проектирования параллельно оси z_{view}, уравнения преобразования ортогональной проекции тривиальны. Для любой точки (x, y, z) в координатах наблюдения, координаты проекции выражаются так:

$$x_p = x, \qquad y_p = y. \tag{6}$$

Значение координаты z при любом преобразовании проектирования записывается для использования в процедурах определения видимости. Запишем результат в виде матрицы преобразования:

$$\mathbf{M}_{\text{ortho}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Косоугольные параллельные проекции

Координаты косоугольной параллельной проекции можно следующим образом выразить через x, y, L и ϕ (см. рисунок на слайде 11):

$$\begin{aligned} x_p &= x + L\cos\phi, \\ y_p &= y + L\sin\phi. \end{aligned} \tag{7}$$

Длина L зависит от угла α и расстояния по перпендикуляру от проецируемой точки (x, y, z) до плоскости наблюдения:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{z_{vp} - z}{L}. \tag{8}$$

Следовательно,

$$L = \frac{z_{vp} - z}{\operatorname{tg}\alpha} = L_1(z_{vp} - z), \tag{9}$$

где $L_1 = \operatorname{ctg}\alpha$, что равно L при $z_{vp} - z = 1$. Таким образом, уравнения (7) косоугольной параллельной проекции можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} x_p &= x + L_1(z_{vp} - z)\cos\phi, \\ y_p &= y + L_1(z_{vp} - z)\sin\phi. \end{aligned} \tag{10}$$

Ортогональная проекция получается при $L_1 = 0$ (это условие выполняется, когда угол проекции $\alpha = 90^\circ$).

Косоугольные параллельные проекции

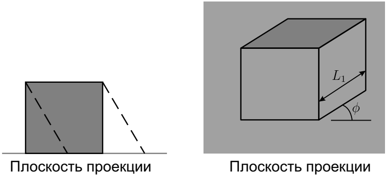
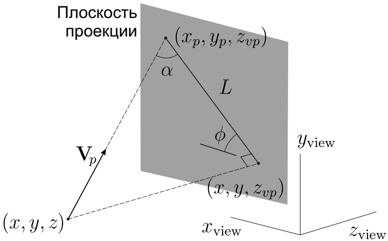


Рис.: Косоугольная параллельная проекция куба (вид сверху) на плоскость наблюдения, которая совпадает с передней гранью куба, даёт комбинацию вида спереди, сбоку и сверху. Задняя плоскость куба сдвигается и накладывается на переднюю при проектировании на плоскость наблюдения. Боковая грань куба, соединяющая переднюю и заднюю плоскости, проектируется в линию длины L_1, которая образует угол ϕ с горизонтальной линией плоскости проекции.

Уравнения (10) представляют преобразование сдвига по оси z. Фактически влияние косоугольной параллельной проекции заключается в сдвиге плоскостей постоянного z и проектировании их на плоскость наблюдения.

Вектор косоугольной параллельной проекции



Направление проекции на плоскость наблюдения часто задаётся вектором параллельной проекции $\mathbf{V}_p$. Данный вектор направления можно задать точкой относительно точки наблюдения (начала координат) или двумя любыми точками. После определения вектора проекции $\mathbf{V}_p$ в координатах наблюдения все точки сцены переносятся на плоскость наблюдения вдоль линий, параллельных этому вектору.

Компоненты вектора проекции относительно системы наблюдения можно обозначить как $\mathbf{V}_p = (V_{px}, V_{py}, V_{pz})$, где $V_{py}/V_{px} = \operatorname{tg}\phi$. После этого, сравнивая подобные треугольники, получим:

$$\frac{x_p - x}{z_{vp} - z} = \frac{V_{px}}{V_{pz}}, \qquad \frac{y_p - y}{z_{vp} - z} = \frac{V_{py}}{V_{pz}}.$$

Тогда можно записать эквивалент уравнений косоугольной параллельной проекции (10) через вектор проекции:

$$x_p = x + (z_{vp} - z)\frac{V_{px}}{V_{pz}}, \qquad y_p = y + (z_{vp} - z)\frac{V_{py}}{V_{pz}}. \tag{11}$$

Матрица косоугольной параллельной проекции

Элементы матрицы косоугольной параллельной проекции можно выразить следующим образом:

$$\mathbf{M}_{\text{oblique}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\dfrac{V_{px}}{V_{pz}} & z_{vp}\dfrac{V_{px}}{V_{pz}} \\ 0 & 1 & -\dfrac{V_{py}}{V_{pz}} & z_{vp}\dfrac{V_{py}}{V_{pz}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Под действием данной матрицы значения координат x и y смещаются на величину, пропорциональную расстоянию от плоскости наблюдения, которая имеет координату z_{vp} по оси z_{view}. Значения z точек не меняются. Если $V_{px} = V_{py} = 0$, получаем ортогональную проекцию, и матрица (12) сводится к единичной.

Объём наблюдения косоугольной параллельной проекции

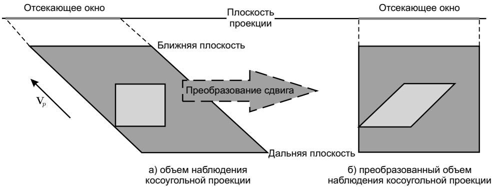
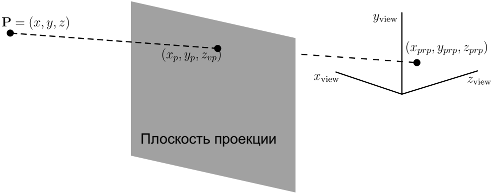


Рис.: Вид сверху косоугольного параллельного преобразования.

Для произвольной косоугольной параллельной проекции матрица (12) представляет преобразование сдвига относительно оси z. Все точки косоугольного объёма наблюдения сдвигаются на величину, пропорциональную их расстоянию от плоскости наблюдения. Целью является сдвиг косоугольного объёма наблюдения в прямоугольный параллелепипед. Таким образом, точки внутри объёма наблюдения сдвигаются в точки ортогональной проекции под воздействием косоугольной параллельной проекции. Точки с координатами (x, y) на каждой плоскости постоянного z смещаются на величину, пропорциональную расстоянию до плоскости наблюдения, поэтому углы, расстояния и параллельные линии на плоскости z проектируются точно.

Координаты перспективной проекции



Пусть точка (x, y, z) проектируется в произвольный центр проекции $(x_{prp}, y_{prp}, z_{prp})$. Линия проекции пересекает плоскость наблюдения в точке с координатами (x_p, y_p, z_{vp}), где z_{vp} — некоторое выбранное положение плоскости наблюдения на оси z_{view}. Далее можно составить уравнения, в параметрической форме описывающие координаты вдоль данной линии перспективной проекции:

$$
\begin{aligned}
x' &= x - (x - x_{prp})u, \\
y' &= y - (y - y_{prp})u, \\
z' &= z - (z - z_{prp})u.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Координаты перспективной проекции

Координаты (x', y', z') представляют любую точку вдоль линии проекции. При $u = 0$ мы находимся в точке $\mathbf{P} = (x, y, z)$. На другом конце линии (при $u = 1$) имеем центр проекции с координатами $(x_{prp}, y_{prp}, z_{prp})$. На плоскости наблюдения $z' = z_{vp}$, и из уравнения для z' находится параметр u в этой точке вдоль линии проекции:

$$u = \frac{z_{vp} - z}{z_{prp} - z}. \tag{14}$$

Подставляя это значение u в уравнения для x' и y', получим уравнения произвольного перспективного преобразования:

$$\begin{aligned} x_p &= x\left(\frac{z_{prp} - z_{vp}}{z_{prp} - z}\right) + x_{prp}\left(\frac{z_{vp} - z}{z_{prp} - z}\right), \\ y_p &= y\left(\frac{z_{prp} - z_{vp}}{z_{prp} - z}\right) + y_{prp}\left(\frac{z_{vp} - z}{z_{prp} - z}\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Уравнения перспективного отображения гораздо сложнее уравнений параллельной проекции, поскольку знаменатели в формулах (15) являются функциями координаты z точки пространства. Следовательно, теперь нужно сформулировать процедуры перспективного преобразования немного иначе, чтобы это отображение можно было свернуть с другими преобразованиями наблюдения.

Частные случаи уравнений перспективной проекции

1. Чтобы упростить расчёт, положение центра проекции можно ограничить точками вдоль оси z_{view}. Тогда $x_{prp} = y_{prp} = 0$ и

$$x_p = x\left(\frac{z_{prp} - z_{vp}}{z_{prp} - z}\right), \qquad y_p = y\left(\frac{z_{prp} - z_{vp}}{z_{prp} - z}\right). \tag{16}$$

2. Иногда центр проекции фиксируется в начале координат. Тогда $(x_{prp}, y_{prp}, z_{prp}) = (0, 0, 0)$ и

$$x_p = x\left(\frac{z_{vp}}{z}\right), \qquad y_p = y\left(\frac{z_{vp}}{z}\right). \tag{17}$$

3. Если плоскостью наблюдения является плоскость $\mathbf{uv}$, то $z_{vp} = 0$ и

$$\begin{aligned} x_p &= x\left(\frac{z_{prp}}{z_{prp} - z}\right) - x_{prp}\left(\frac{z}{z_{prp} - z}\right), \\ y_p &= y\left(\frac{z_{prp}}{z_{prp} - z}\right) - y_{prp}\left(\frac{z}{z_{prp} - z}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

4. Когда плоскостью наблюдения является плоскость $\mathbf{uv}$, а центр проекции находится на оси z_{view}, то $x_{prp} = y_{prp} = z_{vp} = 0$ и уравнения перспективной проекции записываются так

$$x_p = x\left(\frac{z_{prp}}{z_{prp} - z}\right), \qquad y_p = y\left(\frac{z_{prp}}{z_{prp} - z}\right). \tag{19}$$

Матрица перспективной проекции

Чтобы получить выражения для элементов матрицы перспективной проекции из уравнений (15), нужно использовать трёхмерное представление в однородных координатах. Пусть

$$x_p = \frac{x_h}{h}, \qquad y_p = \frac{y_h}{h}, \tag{20}$$

где однородный параметр имеет значение:

$$h = z_{prp} - z. \tag{21}$$

Числители в уравнениях (20) такие же, как в уравнениях (15):

$$\begin{aligned} x_h &= x\left(z_{prp} - z_{vp}\right) + x_{prp}\left(z_{vp} - z\right), \\ y_h &= y\left(z_{prp} - z_{vp}\right) + y_{prp}\left(z_{vp} - z\right). \end{aligned} \tag{22}$$

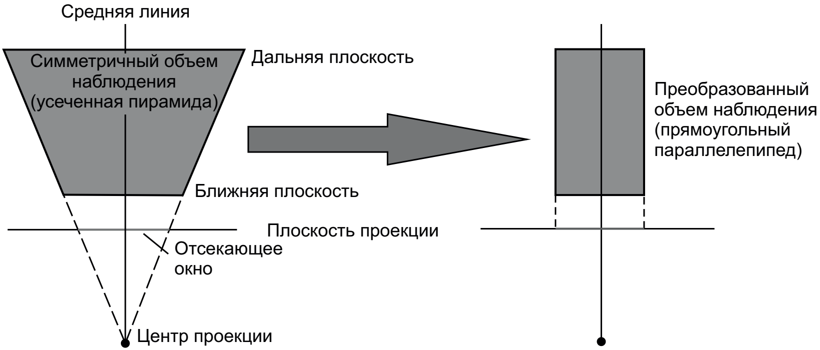
Тогда матрица перспективной проекции имеет вид:

$$\mathbf{M}_{\textsf{pers}} = \begin{bmatrix} z_{prp} - z_{vp} & 0 & -x_{prp} & x_{prp} z_{vp} \\ 0 & z_{prp} - z_{vp} & -y_{prp} & y_{prp} z_{vp} \\ 0 & 0 & s_z & t_z \\ 0 & 0 & -1 & z_{prp} \end{bmatrix}. \tag{23}$$

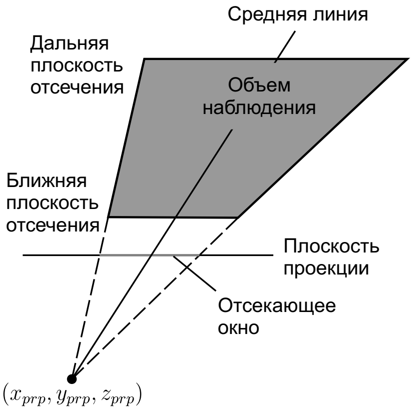
Параметры s_z и t_z — это коэффициенты масштабирования и трансляции для нормировки спроектированных значений координат z, которые зависят от выбранного диапазона нормировки.

Симметричная пирамида перспективной проекции

Под действием матрицы (23) описание сцены переводится в однородные координаты параллельной проекции.
Когда объём наблюдения перспективной проекции является симметричной пирамидой, перспективное преобразование отображает точки внутри усечённой пирамиды в прямоугольный параллелепипед. Средняя линия параллелепипеда является средней линией пирамиды, поскольку эта прямая уже перпендикулярна плоскости наблюдения. После преобразования симметричной пирамиды в объём наблюдения ортогональной проекции, можно применить преобразование нормировки.



Несимметричная пирамида перспективной проекции



Если средняя линия объёма наблюдения перспективной проекции не перпендикулярна плоскости наблюдения, получаем наклонную усеченную пирамиду. В этом случае можно вначале преобразовать объём наблюдения в симметричную усеченную пирамиду, а затем — в нормированный объём наблюдения.

Несимметричная пирамида перспективной проекции

Объём наблюдения косоугольной перспективной проекции можно преобразовать в симметричную пирамиду, подействовав матрицей сдвига вдоль оси z. Данное преобразование смещает все точки любой плоскости, которая перпендикулярна оси z, на величину, пропорциональную расстоянию от этой плоскости до заданной опорной точки на оси z. В данном случае опорной точкой является z_{prp} — координата z центра проекции. Величина сдвига должна быть такой, чтобы центр отсекающего окна переместился в точку (x_{prp}, y_{prp}) на плоскости наблюдения. В этом случае, средняя линия усечённой пирамиды станет перпендикулярна плоскости наблюдения.

Расчёты преобразования сдвига, а также перспективного преобразования и нормировки существенно сокращаются, если положить, что центр проекции находится в начале системы координат наблюдения. Чтобы сделать это, не нарушая общности, можно так транслировать все точки сцены, чтобы выбранный центр проекции сместился в начало координат. Или же можно изначально так задать систему наблюдения, чтобы её начало находилось в точке проекции данного положения сцены. Кроме того, некоторые графические библиотеки фактически помещают центр проекции в начало координат.

Элементы матрицы перспективной проекции можно упростить ещё больше, если совместить плоскость наблюдения с ближней плоскостью отсечения.

Несимметричная пирамида перспективной проекции

Матрица сдвига относительно центра проекции $(x_{prp}, y_{prp}, z_{prp}) = (0, 0, 0)$ имеет вид:

$$\mathbf{M}_{z\text{shear}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \lambda_{zx} & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_{zy} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Поскольку центр отсекающего окна мы поместили в точку с координатами $(0, 0)$, то имеем:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ z_{\text{near}} \\ 1 \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{z\text{shear}} \cdot \begin{bmatrix} \dfrac{xw_{\min} + xw_{\max}}{2} \\ \dfrac{yw_{\min} + yw_{\max}}{2} \\ z_{\text{near}} \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Следовательно, параметры этого преобразования сдвига записываются так:

$$\begin{aligned} \lambda_{zx} &= -\frac{xw_{\min} + xw_{\max}}{2z_{\text{near}}}, \\ \lambda_{zy} &= -\frac{yw_{\min} + yw_{\max}}{2z_{\text{near}}}. \end{aligned} \tag{26}$$

Если центр проекции находится в начале системы координат наблюдения, а плоскость наблюдения совпадает с ближней плоскостью отсечения, матрица перспективной проекции (23) упрощается до вида:

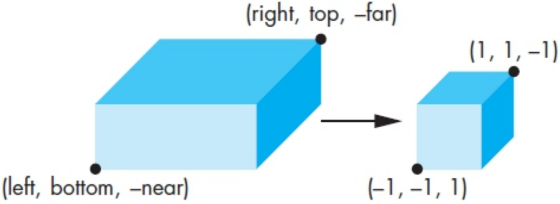
$$\mathbf{M}_{\text{pers}} = \begin{bmatrix} -z_{\text{near}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z_{\text{near}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & t_z \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Сворачивая упрощённую матрицу перспективной проекции (27) с матрицей сдвига (24), получим следующую матрицу косоугольной перспективной проекции:

$$\mathbf{M}_{\text{obliquepers}} = \mathbf{M}_{\text{pers}} \cdot \mathbf{M}_{z\text{shear}} = \begin{bmatrix} -z_{\text{near}} & 0 & \frac{xw_{\text{min}} + xw_{\text{max}}}{2} & 0 \\ 0 & -z_{\text{near}} & \frac{yw_{\text{min}} + yw_{\text{max}}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & s_z & t_z \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Матрица (28) переводит точки сцены из координат наблюдения в координаты перспективной проекции и преобразует пирамидальный объём наблюдения перспективной проекции в прямоугольный параллелепипед.

Нормировка ортогональной проекции



Рассмотрим объём наблюдения ортогональной проекции, имеющий вид прямоугольного параллелепипеда, правая сторона которого — это плоскость $xw_{\textsf{max}} = r$, левая — плоскость $xw_{\textsf{min}} = l$, верхняя — плоскость $yw_{\textsf{max}} = t$, нижняя — плоскость $yw_{\textsf{min}} = b$, передняя — ближняя плоскость отсечения $z_{\textsf{near}} = -n$, а задняя — дальняя плоскостью отсечения $z_{\textsf{far}} = -f$. Проекционная матрица должна преобразовывать этот объём в нормированный объём наблюдения, представляющим собой куб с центром в начале координат со сторонами длиной 2.

Точки внутри нормированного объема с координатами $x = 1$ (соответственно $x = -1$) должны находиться в правой (соответственно левой) части окна, а точки с координатами $y = 1$ (соответственно $y = -1$) находятся вверху (соответственно внизу) экрана. Точки с координатой $z = 1$ — это точки, лежащие на ближней плоскости отсечения, а точки с $z = -1$ принадлежат дальней плоскости отсечения.

Нормировка ортогональной проекции

Чтобы получить итоговую матрицу ортогональной проекции, осуществляющей проецирование и нормировку, воспользуемся известными геометрическими преобразованиями. Нам нужно выполнить две задачи. Во-первых, мы должны переместить центр заданного объёма наблюдения в центр нормированного объёма наблюдения (т.е. в начало координат), выполнив преобразование перемещения. Во-вторых, мы должны масштабировать стороны заданного объёма наблюдения, чтобы каждая их них имела длину 2. Запишем эти два преобразования:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}\left(-(r+l)/2 \quad -(t+b)/2 \quad +(f+n)/2\right),$$
$$\mathbf{S} = \mathbf{S}\left(2/(r-l) \quad 2/(t-b) \quad 2/(n-f)\right).$$

Объединим их вместе и получим итоговую матрицу:

$$\mathbf{M}_{\text{ortho,norm}} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{2}{r-l} & 0 & 0 & -\frac{r+l}{r-l} \\ 0 & \frac{2}{t-b} & 0 & -\frac{t+b}{t-b} \\ 0 & 0 & \frac{-2}{f-n} & -\frac{f+n}{f-n} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

На данную матрицу справа множится матрица наблюдения, в результате чего находится полное преобразование из внешних координат в нормированные координаты ортогональной проекции.

Нормировка косоугольной параллельной проекции

Поскольку уравнения косоугольной параллельной проекции переводят описания объектов в координаты ортогональной проекции, после этого преобразования можно применить процедуры нормировки. Таким образом, полное преобразование из координат наблюдения в нормированные координаты для косоугольной параллельной проекции записывается так:

$$\mathbf{M}_{\text{oblique,norm}} = \mathbf{M}_{\text{ortho,norm}} \cdot \mathbf{M}_{\text{oblique}}. \tag{30}$$

Преобразование $\mathbf{M}_{\text{oblique}}$ представляется матрицей (12), под действием которой описание сцены переводится в координаты ортогональной проекции, а преобразование $\mathbf{M}_{\text{ortho,norm}}$ описывается матрицей (29), и при его применении содержимое ортогонального объёма наблюдения отображается в симметричный нормированный куб.
Чтобы завершить преобразование наблюдения (исключая отображение в экранные координаты поля просмотра), умножим матрицу (30) слева на матрицу преобразования из внешних координат в координаты наблюдения (4).

Нормировка координат перспективной проекции

Заключительным этапом процесса перспективного преобразования является отображение данного параллелепипеда в *нормированный объём наблюдения*.

Используем ту же процедуру нормировки, что и для параллельной проекции. Преобразованный пирамидальный объём наблюдения (прямоугольный параллелепипед) отображается в симметричный нормированный куб, определённый в левосторонней системе координат. В матрицу перспективной проекции (28) уже включены параметры нормировки по z. Кроме того, нужно определить параметры нормировки по x и y. Поскольку средней линией объёма наблюдения (прямоугольного параллелепипеда) является ось z_{view}, при нормировке по x и y никакой трансляции не требуется. Нужны всего лишь параметры масштабирования по осям x и y относительно начала координат. Матрица масштабирования для выполнения нормировки по xy записывается следующим образом:

$$\mathbf{M}_{xy\text{scale}} = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Нормировка координат перспективной проекции

Сворачивая матрицу (31) с матрицей (28), получаем следующую матрицу нормировки для преобразования перспективной проекции:

$$\mathbf{M}_{\text{normpers}} = \mathbf{M}_{xy\text{scale}} \cdot \mathbf{M}_{\text{obliquepers}} = \begin{bmatrix} ns_x & 0 & s_x \dfrac{r+l}{2} & 0 \\ 0 & ns_y & s_y \dfrac{t+b}{2} & 0 \\ 0 & 0 & s_z & t_z \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Из этого преобразования получаем однородные координаты:

$$\begin{bmatrix} x_h \\ y_h \\ z_h \\ h \end{bmatrix} = \mathbf{M}_{\text{normpers}} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Координаты проекции выражаются так:

$$\begin{aligned} x_p &= \frac{x_h}{h} = \frac{ns_x x + s_x z(r+l)/2}{-z}, \\ y_p &= \frac{y_h}{h} = \frac{ns_y y + s_y z(t+b)/2}{-z}, \\ z_p &= \frac{z_h}{h} = \frac{s_z z + t_z}{-z}. \end{aligned} \quad (34)$$

Нормировка координат перспективной проекции

Для нормировки этого перспективного преобразования требуется, чтобы координаты проекции были равны $(x_p, y_p, z_p) = (-1, -1, -1)$ при входных координатах $(x, y, z) = (l, b, -n)$, а также необходимо, чтобы координаты проекции точки были $(x_p, y_p, z_p) = (1, 1, 1)$ при входных координатах $(x, y, z) = (r, t, -f)$. Подставляя эти условия в уравнения (34) получаем:

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{2}{r-l}, & s_y &= \frac{2}{t-b}, \\ s_z &= \frac{f+n}{n-f}, & t_z &= \frac{2fn}{n-f}. \end{aligned} \tag{35}$$

Элементы нормированной матрицы преобразования для произвольной перспективной проекции выражаются следующим образом:

$$\mathbf{M}_{\text{normpers}} = \begin{bmatrix} \frac{2n}{r-l} & 0 & \frac{r+l}{r-l} & 0 \\ 0 & \frac{2n}{t-b} & \frac{t+b}{t-b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{f+n}{n-f} & \frac{2fn}{n-f} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Если объём наблюдения перспективной проекции первоначально задан в виде симметричной усечённой пирамиды, элементы нормированного перспективного преобразования можно выразить через угол обзора и размеры отсекающего окна. Если центр проекции находится в начале координат и плоскость наблюдения совпадает с ближней плоскостью отсечения, то получаем:

$$\mathbf{M}_{\text{норм. симм. персп.}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{\text{хар. отн.}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{f+n}{n-f} & \dfrac{2nf}{n-f} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (37)$$

Данная матрица осуществляет преобразование из координат наблюдения в нормированные координаты перспективной проекции. Для получения матрицы полного преобразования из внешних координат в нормированные требуется матрицу (37) домножить слева на матрицы преобразования наблюдения $\mathbf{R} \cdot \mathbf{T}$.