



Московский государственный технический университет  
имени Н. Э. Баумана

Электронное учебное издание

Захаров А. А.

**Методы компьютерного построения  
кривых и поверхностей на основе  
сплайнов.**

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э. БАУМАНА»  
(МГТУ им. Н.Э.Баумана)

**Захаров А. А.**

**Методы компьютерного построения кривых и  
поверхностей на основе сплайнов.**

*Методические указания к выполнению лабораторных работ  
по дисциплине «Компьютерная графика»*

Москва  
Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана  
2014

УДК 004.925.8

ББК 22.19

???

Рецензенты: . . . \_\_\_\_\_, *В. А. Кутыркин*

**Захаров А. А.**

??? Методы компьютерного построения кривых и поверхностей на основе сплайнов. : методические указания / Захаров А. А. — М. : Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2014. — 35, [2] с. : ил.

Изучаются методы геометрического моделирования кривых линий и поверхностей на основе сплайновых представлений. Рассматриваются методы интерполяции естественными кубическими сплайнами, сплайнами Эрмита и различными видами фундаментальных сплайнов. Изложены методы аппроксимации на основе кривых Безье и В-сплайнов.

Для студентов старших курсов, обучающихся по специальности «Прикладная математика».

УДК 004.925.8

ББК 22.19

---

---

## Введение

---

---

Геометрические модели играют важную роль в конструировании, производстве и изображении объектов. Примерами областей их применения являются:

- проектирование корпусов и оболочек в машиностроении — автомобилей, кораблей и отдельных деталей;
- разработка программ обработки поверхностей для автоматических станков;
- дизайн изделий легкой промышленности — мебели, посуды, обуви и одежды;
- визуализация экспериментальных данных о границах раздела сред в естественных науках — медицине (компьютерная томография), геологии и локации (построение рельефа поверхности Земли, морского дна, космических объектов).

Границами, отделяющими пространство, принадлежащее объекту, от внешнего мира являются *кривые* и *поверхности*.

Во многих практических задачах аналитическая формула линии неизвестна, но требуется, например, чтобы кривая проходила через заданные точки, имела определённую степень гладкости или, в определённых точках, имела заданные производные. Для построения таких линий в компьютерной графике используются *сплайновые кривые* — любые составные кривые, сформированные полиномиальными участками, удовлетворяющими заданным условиям непрерывности на границах участков. *Сплайновую поверхность* можно описать двумя наборами ортогональных сплайновых кривых.

Существуют различные типы сплайнов, используемых в приложениях компьютерной графики. Каждая отдельная спецификация связана с определённым типом полиномов и граничных условий.

Сплайны применяются:

- для разработки кривых и поверхностей в САПР (разработка кузовов автомобиля, поверхностей самолетов и космических кораблей, корпусов кораблей и бытовых приборов),
- для оцифровки рисунков,
- для задания путей анимации объектов или положений камеры на сцене.

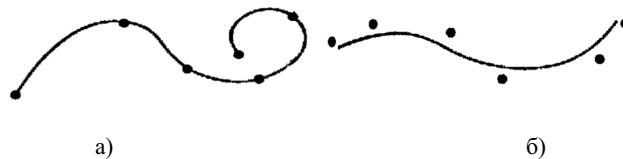
## Сплайновые представления

### 1.1. Интерполяция и аппроксимация сплайнами

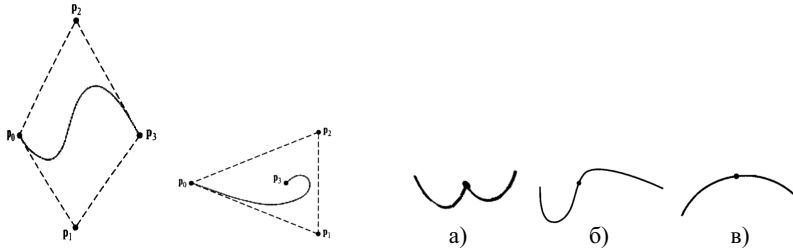
Сплайновая кривая задаётся через набор координат точек, именуемых контрольными (характеристические, опорные), которые указывают общую форму кривой. Затем по данным точкам подбирается кусочно-непрерывная параметрическая полиномиальная функция. Если полиномиальные участки соединяют все контрольные точки, получающаяся кривая называется *интерполяцией* набора контрольных точек. Если генерируемая полиномиальная кривая строится так, что некоторые или все контрольные точки не лежат на пути кривой, эта кривая называется *аппроксимацией* набора контрольных точек. Подобные методы используются для построения интерполяций или аппроксимаций сплайновых поверхностей (рис. 1).

Методы интерполяции широко используются для оцифровки рисунков или задания путей анимации. Методы аппроксимации применяются в основном в средствах проектирования для создания форм объектов.

Сплайновая кривая или поверхность определяется, модифицируется и используется путем действий с контрольными точками. Интерактивно выбирая положения контрольных точек в пространстве, разработчик может задавать первоначальную форму. После того как для данного набора контрольных точек на экране отображено полиномиальное представление, разработчик может изменить положения некоторых или всех контрольных точек, подбирая таким образом структуру формы объекта. Геометрические преобразования (трансляция, вращение и масштабирование) применяются к объектам также через преобразование контрольных точек. Пакеты авто-



**Рис. 1.** Набор из шести контрольных точек, интерполированных (а) и аппроксимированных (б) кусочно-непрерывной полиномиальной кривой



**Рис. 2.** Формы выпуклых оболочек (пунктирные линии) двух наборов контрольных точек на плоскости  $xy$

**Рис. 3.** Кусочно-гладкое построение кривой путём соединения двух сегментов с использованием непрерывности разного порядка: а)  $C^0$ ; б)  $C^1$ ; в)  $C^2$

матризованного проектирования иногда позволяют вводить дополнительные контрольные точки, чтобы помочь разработчику получить требуемую форму объекта.

Набор контрольных точек формирует границу области пространства, называемую *выпуклой оболочкой*. Выпуклая оболочка двумерной сплайновой кривой является выпуклым многоугольником (рис. 2). В трехмерном пространстве выпуклая оболочка набора сплайновых кривых формирует выпуклый многогранник. В большинстве случаев сплайн ограничивается его выпуклой оболочкой, а это гарантирует, что форма объекта следует за контрольными точками без ложных осцилляций.

## 1.2. Условия непрерывности

Чтобы гарантировать гладкие переходы от одного участка кусочно-гладкого параметрического сплайна к следующему, можно наложить различные *условия непрерывности* в точках соединения (рис. 3). Если каждый  $i$ -й участок сплайновой кривой описывается набором параметрических координатных функций вида

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1},$$

непрерывность по параметру задаётся согласованием производных соединяющихся участков кривых по параметрам в их общей границе.



Рис. 4. Линейный (а) и линейный поверхностный (б) сплайны

Непрерывности первого порядка часто достаточно для оцифровки рисунков и в некоторых конструкторских приложениях, тогда как непрерывность второго порядка полезна при задании путей анимации для движения камеры и во многих точных приложениях автоматизированного проектирования.

### 1.3. Интерполяция линейными сплайнами

Уравнение линейного сплайна с вершинами в точках  $\mathbf{p}_i$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, n$  имеет вид:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}_i (1 - \omega) + \mathbf{p}_{i+1}\omega,$$

где  $\omega = \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i}$ ,  $t_i < t_{i+1}$  и  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$ .

Для построения линейной интерполяции участка поверхности между вершинами  $\mathbf{p}_{i,j}$ ,  $\mathbf{p}_{i,j+1}$ ,  $\mathbf{p}_{i+1,j}$ ,  $\mathbf{p}_{i+1,j+1}$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots, m$  запишем линейно интерполированные граничные линии

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_0(t) &= \mathbf{p}_{i,j} (1 - \omega) + \mathbf{p}_{i+1,j}\omega, \\ \mathbf{r}_1(t) &= \mathbf{p}_{i,j+1} (1 - \omega) + \mathbf{p}_{i+1,j+1}\omega. \end{aligned}$$

Зафиксируем значение параметра в интервале  $t_i \leq t \leq t_{i+1}$  и построим линейную интерполяцию граничных точек сегмента  $\mathbf{r}_0(t)$  и  $\mathbf{r}_1(t)$  по второму непрерывному параметру  $\tau_j \leq \tau \leq \tau_{j+1}$ :

$$\mathbf{r}(t, \tau) = \mathbf{r}_0(t) (1 - \xi) + \mathbf{r}_1(t)\xi, \quad \xi = \frac{\tau - \tau_j}{\tau_{j+1} - \tau_j},$$

что также является отрезком прямой.

На рис. 4 показаны примеры участков линейных сплайнов.

## Методы интерполяции кубическими сплайнами

Интерполяция кубическими сплайнами наиболее часто используется для настройки путей движения объектов или получения представления существующего объекта или рисунка, хотя интерполирующие сплайны также иногда применяются для разработки форм объектов. Кубические сплайны предлагают разумный компромисс между гибкостью и скоростью вычислений. По сравнению с полиномами более высоких порядков кубические сплайны требуют меньше расчётов и памяти, они более устойчивы. Полиномы низших порядков могут не обеспечивать достаточной точности. Кроме того, параметрические кубические кривые — это кривые самого низкого порядка, которые могут занимать произвольное положение (не лежать на плоскости) в трехмерном пространстве. Действительно, положение кривой, описываемой полиномом второй степени, задаётся тремя точками, а три точки всегда определяют плоскость.

Чтобы интерполировать заданный набор контрольных точек кубическими сплайнами, по входным данным подбирается кусочно-кубическая полиномиальная кривая, проходящая через все контрольные точки.

### 2.1. Постановка задачи

Предположим, что даны  $n + 1$  контрольных точек, заданных координатами

$$\mathbf{p}_k = (x_k, y_k, z_k), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Кубическая интерполяция данных точек иллюстрируется на рис. 5. Параметрический кубический полином, связывающий каждую пару кон-

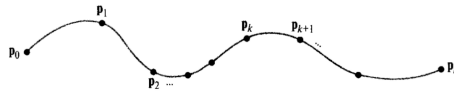


Рис. 5. Кусочно-непрерывная интерполяция кубическими сплайнами  $n + 1$  контрольных точек

трольных точек, можно описать следующей системой уравнений:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{a}t^3 + \mathbf{b}t^2 + \mathbf{c}t + \mathbf{d}, \quad (t_k \leq t \leq t_{k+1}),$$

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Нужно определить значения четырёх коэффициентов  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$ , и  $\mathbf{d}$  для каждого из  $n$  участков кривой. Для этого задаётся достаточное число граничных условий в контрольных точках между участками кривой, на основе которых находятся численные значения всех коэффициентов.

## 2.2. Естественные кубические сплайны

Одной из первых сплайновых кривых, разработанных для графических приложений, стал *естественный кубический сплайн*. Чтобы определить естественный кубический сплайн, нужно указать, что два соседних участка кривой имеют равные первые и вторые производные по параметру в их общей точке, т.е. он непрерывен в  $C^2$ .

Если даны  $n + 1$  контрольных точек, то имеется  $n$  участков кривой и всего нужно определить  $4n$  коэффициентов полиномов. В каждой из  $n - 1$  внутренних контрольных точек задаётся 4 граничных граничных условия: два участка кривой с обеих сторон контрольной точки должны иметь одинаковые первые и вторые производные по параметру в данной контрольной точке, и каждая кривая должна проходить через эту контрольную точку. В результате имеем  $4n - 4$  уравнений. Ещё одно уравнение даёт первая контрольная точка  $\mathbf{p}_0$ , начало кривой, и ещё одно — контрольная точка  $\mathbf{p}_n$ , которая должна быть последней точкой кривой. Однако, чтобы определить значения всех коэффициентов, недостаёт ещё двух уравнений. Одним из способов получения двух дополнительных условий является установка вторых производных в точках  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{p}_n$  равными 0.

Естественные кубические сплайны обладают серьёзным недостатком. Если поменять положение любой контрольной точки, изменится вся кривая. Таким образом, естественные кубические сплайны не допускают *локального управления*.

### 2.3. Эрмитова интерполяция

Эрмитовым сплайном (названным в честь французского математика Шарля Эрмита (Charles Hermite), который подробно исследовал их свойства) является интерполирующий кусочно-кубический полином с заданной касательной в каждой контрольной точке. В отличие от естественных кубических сплайнов эрмитовы сплайны можно настраивать локально, поскольку каждый участок кривой зависит только от условий в конечных точках.

Пусть даны:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_k) &= \mathbf{p}_k, & \mathbf{r}(t_{k+1}) &= \mathbf{p}_{k+1}, \\ \mathbf{r}'(t_k) &= \mathbf{p}'_k, & \mathbf{r}'(t_{k+1}) &= \mathbf{p}'_{k+1}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{p}'_k$  и  $\mathbf{p}'_{k+1}$  задают значения производных по параметру (наклона кривой) в контрольных точках  $\mathbf{p}_k$  и  $\mathbf{p}_{k+1}$  соответственно.

Запишем вид функций  $\mathbf{r}(t)$  и  $\mathbf{r}'(t)$  в матричном виде:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Подставляя в (2.3) вместо параметра  $t$  значения конечных точек  $t_k$  и  $t_{k+1}$ , эрмитовы граничные условия можно выразить в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_{k+1} \\ \mathbf{p}'_k \\ \mathbf{p}'_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_k^3 & t_k^2 & t_k & 1 \\ t_{k+1}^3 & t_{k+1}^2 & t_{k+1} & 1 \\ 3t_k^2 & 2t_k & 1 & 0 \\ 3t_{k+1}^2 & 2t_{k+1} & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix}.$$

Решая это уравнение относительно коэффициентов полиномов, получаем:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_k^3 & t_k^2 & t_k & 1 \\ t_{k+1}^3 & t_{k+1}^2 & t_{k+1} & 1 \\ 3t_k^2 & 2t_k & 1 & 0 \\ 3t_{k+1}^2 & 2t_{k+1} & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_{k+1} \\ \mathbf{p}'_k \\ \mathbf{p}'_{k+1} \end{bmatrix}.$$

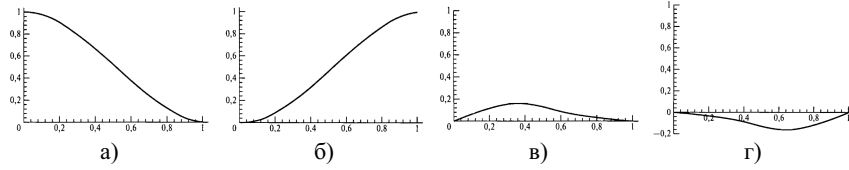


Рис. 6. Эрмитовы стыковочные функции

Если  $t_k = 0$ , а  $t_{k+1} = 1$ , то

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{c} \\ \mathbf{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_{k+1} \\ \mathbf{p}'_k \\ \mathbf{p}'_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_{k+1} \\ \mathbf{p}'_k \\ \mathbf{p}'_{k+1} \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Из (2.4) можно получить следующую полиномиальную форму:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{p}_k (2t^3 - 3t^2 + 1) + \mathbf{p}_{k+1} (-2t^3 + 3t^2) + \mathbf{p}'_k (t^3 - 2t^2 + t) + \mathbf{p}'_{k+1} (t^3 - t^2) = \mathbf{p}_k H_0(t) + \mathbf{p}_{k+1} H_1(t) + \mathbf{p}'_k H_2(t) + \mathbf{p}'_{k+1} H_3(t).$$

На рис. 6 показана форма четырёх эрмитовых стыковочных функций. В начальной точке ( $t=0$ ) только одна кривая  $H_0(t)$  отлична от нуля, таким образом на форму кривой  $\mathbf{r}(t)$  оказывает влияние только одна кривая  $H_0(t)$ . С ростом параметра  $t$  влияние функций  $H_1(t)$ ,  $H_2(t)$ ,  $H_3(t)$  становится более заметным.

Полиномы Эрмита могут быть полезны в некоторых сферах оцифровки, где задать или аппроксимировать наклон кривой не слишком сложно.

Многие интерактивные графические системы позволяют управлять формой кривых Эрмита посредством настройки положения конечных точек и величин касательных векторов. Эти объекты выводятся на экране дисплея и выполняют функции регуляторов формы. Оператор может при помощи мышки перемещать конечные точки и буксировать окончания касательных, программа отслеживает сделанные изменения, рассчитывает и рисует новую форму кривой. Гладкость точки сочленения объектов обычно задаётся специальной командой.

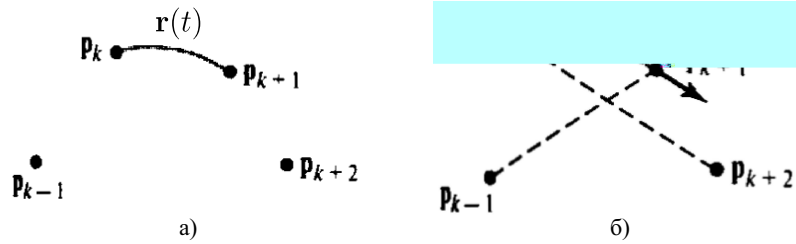


Рис. 7. Фундаментальный сплайн  $\mathbf{r}(t)$  между контрольными точками  $\mathbf{p}_k$  и  $\mathbf{p}_{k+1}$ . Касательные векторы в конечных точках параллельны хордам  $\overline{\mathbf{p}_{k-1}\mathbf{p}_{k+1}}$  и  $\overline{\mathbf{p}_k\mathbf{p}_{k+2}}$

## 2.4. Фундаментальные сплайны

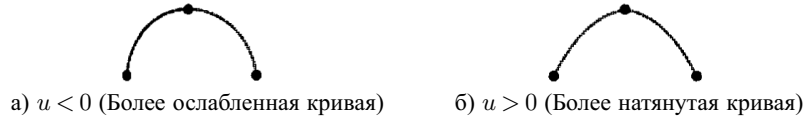
Как и эрмитовы сплайны, *фундаментальные сплайны* — это интерполирующие кусочно-кубические полиномы с заданными касательными в конечных точках. Отличие заключается в том, что теперь значения касательных в конечных точках вводить не нужно.

Участок фундаментального сплайна полностью задаётся положениями четырёх последовательных контрольных точек. Две средние контрольные точки  $\mathbf{p}_k$  и  $\mathbf{p}_{k+1}$  являются конечными точками участка, другие две  $\mathbf{p}_{k-1}$  и  $\mathbf{p}_{k+2}$  используются при расчёте касательных в конечных точках (рис. 7):

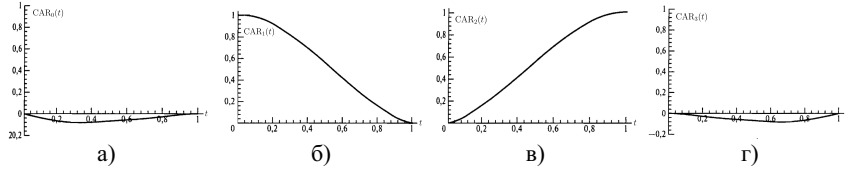
$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_k) &= \mathbf{p}_k, & \mathbf{r}(t_{k+1}) &= \mathbf{p}_{k+1}, & (2.5) \\ \mathbf{r}'(t_k) &= \frac{1}{2}(1-u)(\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_{k-1}), & \mathbf{r}'(t_{k+1}) &= \frac{1}{2}(1-u)(\mathbf{p}_{k+2} - \mathbf{p}_k). \end{aligned}$$

Параметр  $u$  называется параметром *натяжения*, поскольку он контролирует то, насколько тесно фундаментальный сплайн соответствует входным контрольным точкам (рис. 8). При  $u = 0$  данный класс кривых называется *сплайнами Катмалла–Рома* (Catmull–Rom splines) или *сплайнами Оувергаузера* (Overhauser splines). Используя методы, подобные описанным для эрмитовых сплайнов, граничные условия (2.5) можно преобразовать в матричную форму:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s & 2-s & s-2 & s \\ 2s & s-3 & 3-2s & -s \\ -s & 0 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{k-1} \\ \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_{k+1} \\ \mathbf{p}_{k+2} \end{bmatrix}, \quad s = (1-u)/2.$$



**Рис. 8.** Влияние параметра натяжения на форму участка



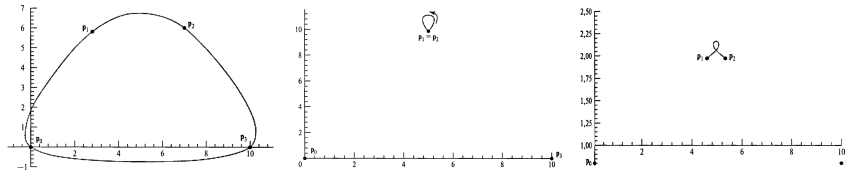
**Рис. 9.** Стыковочные функции фундаментальных сплайнов при  $u = 0$  ( $s = 0.5$ )

Расписывая матричное уравнение в полиномиальную форму, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \mathbf{p}_{k-1} (-st^3 + 2st^2 - su) + \mathbf{p}_k [(2-s)t^3 + (s-3)t^2 + 1] + \\ &+ \mathbf{p}_{k+1} [(s-2)t^3 + (3-2s)t^2 + st] + \mathbf{p}_{k+2} (st^3 - st^2) = \\ &= \mathbf{p}_{k-1} \text{CAR}_0(t) + \mathbf{p}_k \text{CAR}_1(t) + \mathbf{p}_{k+1} \text{CAR}_2(t) + \mathbf{p}_{k+2} \text{CAR}_3(t). \end{aligned}$$

## 2.5. Сплайны Коханека–Бартелса

Сплайны Коханека–Бартелса (Kochanek–Bartels splines) являются расширением фундаментальных сплайнов. В граничные условия вводятся два дополнительных параметра, обеспечивающих повышенную гибкость в на-



**Рис. 10.** Замкнутая кривая из четырёх участков фундаментальных сплайнов

**Рис. 11.** Петля фундаментального сплайна, полученная при совпадающих конечных точках кривой

**Рис. 12.** Самопересекающийся фундаментальный сплайн, порождённый близко расположенными конечными точками кривой

стройке форм сегментов кривых:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t_k) &= \mathbf{p}_k, & \mathbf{r}(t_{k+1}) &= \mathbf{p}_{k+1}, \\ \mathbf{r}'(t_k) &= s [(1+b)(1-c) (\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k-1}) + (1-b)(1+c) (\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k)], \\ \mathbf{r}'(t_{k+1}) &= s [(1+b)(1+c) (\mathbf{p}_{k+1} - \mathbf{p}_k) + (1-b)(1-c) (\mathbf{p}_{k+2} - \mathbf{p}_{k+1})], \end{aligned}$$

где  $b$  — параметр *смещения* (биеция), а  $c$  — параметр *непрерывности*.

Смещение  $b$  используется для настройки кривизны в каждом конце участка, так что этот участок кривой можно скосить к одному или другому концу. Параметр  $c$  контролирует непрерывность касательного вектора на границах участков. Если параметру  $c$  присвоено ненулевое значение, на границах участков наблюдается разрыв касательной кривой.

Сплайны Коханека–Бартелса разработаны для моделирования путей анимации. В частности, резкие изменения движения объекта можно симметризовать, используя ненулевые значения параметра  $c$ . Данные изменения движения используют в мультипликации, например, когда анимационный персонаж быстро останавливается, меняет направление или сталкивается с некоторым объектом.

## 2.6. Поверхности Эрмита

Пусть задана двумерная сетка узлов и первые производные в узлах в обоих параметрических направлениях  $\mathbf{r}(i, j)$ ,  $\mathbf{r}_t(i, j)$ ,  $\mathbf{r}_\tau(i, j)$ ,  $\mathbf{r}_{t\tau}(i, j)$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 0, 1, 2, \dots, n$ . Тогда поверхность Эрмита определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t, \tau) &= \mathbf{H}^T(u) \cdot \mathbf{R}(i, j) \cdot \mathbf{H}(v), \\ \mathbf{R}(i, j) &= \begin{pmatrix} \mathbf{r}(i, j) & \mathbf{r}(i, j+1) & \mathbf{r}_\tau(i, j) & \mathbf{r}_\tau(i, j+1) \\ \mathbf{r}(i+1, j) & \mathbf{r}(i+1, j+1) & \mathbf{r}_\tau(i+1, j) & \mathbf{r}_\tau(i+1, j+1) \\ \mathbf{r}_t(i, j) & \mathbf{r}_t(i, j+1) & \mathbf{r}_{t\tau}(i, j) & \mathbf{r}_{t\tau}(i, j+1) \\ \mathbf{r}_t(i+1, j) & \mathbf{r}_t(i+1, j+1) & \mathbf{r}_{t\tau}(i+1, j) & \mathbf{r}_{t\tau}(i+1, j+1) \end{pmatrix} \\ \mathbf{H}(u) &= (H_0(u) \ H_1(u) \ H_2(u) \ H_3(u))^T, \\ u &= t - i; \quad v = \tau - j; \quad 0 \leq t \leq m; \quad 0 \leq \tau \leq n. \end{aligned}$$

Здесь через  $i$  и  $j$  обозначены целые части параметров  $t$  и  $\tau$  соответственно,  $u$  и  $v$  — местные параметры.

## Сплайновые кривые и поверхности Безье

Данный метод аппроксимации сплайнами был разработан французским инженером Пьером Безье (Pierre Bézier) для использования в проектировании кузова автомобиля Рено. *Сплайны Безье* имеют ряд свойств, делающих их крайне полезными и удобными при разработке кривых и поверхностей. Кроме того, их также легко реализовать. По этим причинам сплайны Безье широко используются в различных системах автоматизированного проектирования, в универсальных графических пакетах и пакетах рисования и живописи.

### 3.1. Уравнения кривых Безье

Рассмотрим вначале общий случай  $n + 1$  контрольных точек, положения которых обозначим через  $\mathbf{p}_k = (x_k, y_k, z_k)$ , где  $k$  меняется от 0 до  $n$ . Данные точки собираются в вектор положений  $\mathbf{r}(t)$ , который описывает путь аппроксимирующей полиномиальной функции Безье между  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{p}_n$ .

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^n B_k^n(t) \mathbf{p}_k, \quad 0 \leq t \leq 1; \quad \mathbf{r} \left( \frac{t - t_0}{t_n - t_0} \right), \quad t_0 \leq t \leq t_n. \quad (3.1)$$

Стыковочные функции Безье  $B_k^n(t)$  являются *полиномами Бернштейна*

$$B_k^n(t) = C_n^k t^k (1 - t)^{n-k}, \quad (3.2)$$

где параметры  $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  — это биномиальные коэффициенты.

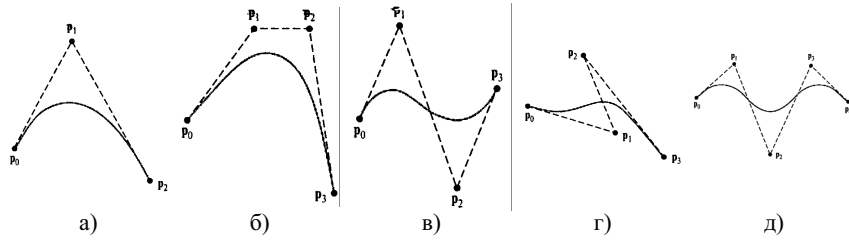
Для получения последовательных значений биномиальных коэффициентов можно использовать рекурсивные вычисления:

$$C_n^k = \frac{n - k + 1}{k} C_n^{k-1}$$

при  $k \leq n$ . Кроме того, стыковочная функция Безье удовлетворяет рекурсивному соотношению:

$$B_k^n(t) = (1 - t)B_k^{n-1}(t) + tB_{k-1}^{n-1}(t), \quad n > k \geq 1,$$

где  $B_k^k = t^k$  и  $B_0^k = (1 - t)^k$ .



**Рис. 13.** Двухмерные кривые Безье, сгенерированные по трем, четырем и пяти контрольным точкам. Контрольные точки соединены пунктирными линиями

### 3.2. Сплайновые представления

В большинстве случаев кривая Безье — это полином, степень которого на единицу меньше заданного числа контрольных точек: три точки определяют параболу, четыре — кубическую кривую и т.д. На рис. 13 демонстрируется внешний вид нескольких кривых Безье при различном наборе контрольных точек на плоскости  $xy$ . При определённом положении контрольных точек, однако, получаются вырожденные полиномы Безье. Например, кривая Безье, сгенерированная тремя контрольными точками, лежащими на одной прямой, является прямым отрезком. Наконец, «кривая» Безье для набора контрольных точек с совпадающими координатами представляет собой одну точку.

### 3.3. Свойства кривых Безье

Кривая Безье соединяет первую и последнюю контрольные точки:

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{p}_n. \quad (3.3)$$

Касательная в начале кривой параллельна линии, соединяющей первые две контрольные точки, а касательная в конце кривой идет по линии, соединяющей последние точки:

$$\mathbf{r}'(0) = n (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0), \quad \mathbf{r}'(1) = n (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}). \quad (3.4)$$

Вторые производные кривых Безье по параметру в конечных точках:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}''(0) &= n(n-1) [(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) - (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0)], \\ \mathbf{r}''(1) &= n(n-1) [(\mathbf{p}_{n-2} - \mathbf{p}_{n-1}) - (\mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{p}_n)]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

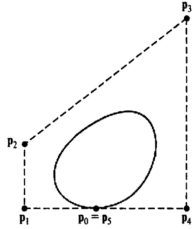


Рис. 14. Замкнутая кривая Безье

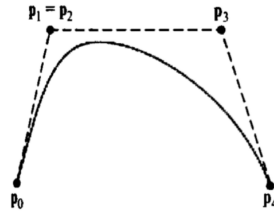


Рис. 15. Ввод кратных контрольных узлов

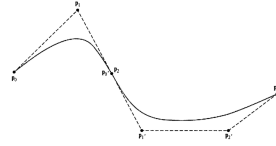


Рис. 16. Кусочно-гладкая аппроксимация

Другое важное свойство кривых Безье заключается в том, что вся она лежит внутри выпуклой оболочки, сформированной контрольными точками. Это следует из того факта, что все стыковочные функции Безье положительны, и их сумма всегда равна 1:

$$\sum_{k=0}^n B_k^n(t) = \sum_{k=0}^n C_n^k t^k (1-t)^{n-k} = (t + (1-t))^n = 1,$$

так что любая точка кривой является взвешенной суммой контрольных точек. Указанное свойство гарантирует отсутствие неравномерных осцилляций.

### 3.4. Методы проектирования с использованием кривых Безье

Чтобы сгенерировать замкнутую кривую Безье, положение последней контрольной точки выбирается равным положению первой, как в примере, показанном на рис. 14. На рис. 15 введены две одинаковые контрольные точки, и видно, что получающаяся кривая притягивается к этой точке.

Кривую Безье можно подобрать по любому числу контрольных точек, но это требует расчета полиномиальных функций большой степени. Если необходимо сгенерировать сложные кривые, их проще сформировать стыковкой нескольких участков Безье меньшей степени.

Использование меньших участков кривых Безье также улучшает локальный контроль над формой кривой. Чтобы получить непрерывность участков кривой первого порядка, контрольные точки  $p_{0'}$  и  $p_{1'}$  следующего участка кривой нужно выбрать на той же прямой линии, что и контрольные точки  $p_{n-1}$  и  $p_n$  предыдущего участка (рис. 16). Если пер-

вый участок кривой имеет  $n$  контрольных точек, а следующий —  $n'$ , тогда касательные к кривым можно согласовать, разместив контрольную точку в положении

$$\mathbf{p}_{1'} = \mathbf{p}_n + \frac{n}{n'} (\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{n-1}) .$$

Чтобы получить непрерывность в  $C^2$ , нужно по уравнению (3.5) согласовать вторые производные по параметру двух соседних участков Безье. В результате в дополнение к фиксированному положению  $\mathbf{p}_0$  и  $\mathbf{p}_{1'}$  (что необходимо для непрерывности  $C^0$  и  $C^1$ ) определяется положение контрольной точки  $\mathbf{p}_{2'}$ . В то же время, требование непрерывности второго порядка участков кривой Безье может быть излишне ограничивающим. Особенно это касается кубических кривых, которые могут иметь только четыре контрольные точки на участок. В этом случае непрерывность второго порядка полностью определяет (фиксирует) положения первых трех контрольных точек и оставляет незафиксированной только одну точку, которую можно использовать для настройки формы сегмента кривой.

### 3.5. Кубические кривые Безье

Многие графические пакеты предлагают только функции отображения кубических сплайнов. Это даёт разумную гибкость проектирования, не требуя увеличения расчётов, необходимых при использовании полиномов более высоких порядков. Кубические кривые Безье определяются четырьмя контрольными точками. Четыре стыковочные функции для кубических кривых Безье получаются подстановкой  $n = 3$  в уравнение (3.2), и они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} B_0^3(t) &= (1 - t)^3, \\ B_1^3(t) &= 3t(1 - t)^2, \\ B_2^3(t) &= 3t^2(1 - t), \\ B_3^3(t) &= t^3. \end{aligned}$$

Графики кубических стыковочных функций Безье приведены на рис. 17.

В конечной точке кубической кривой Безье первые производные по параметру равны

$$\mathbf{r}'(0) = 3 (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) , \quad \mathbf{r}'(1) = 3 (\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) .$$

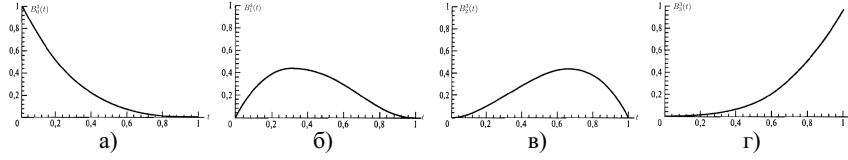


Рис. 17. Четыре стыковочные функции Бэзе для кубических кривых ( $n = 3$ )

Вторые производные по параметру равны

$$\mathbf{r}''(0) = 6 (\mathbf{p}_0 - 2\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \quad \mathbf{r}''(1) = 6 (\mathbf{p}_1 - 2\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3) .$$

Форма стыковочных функций определяет, как контрольные точки влияют на форму кривой при  $0 \leq t \leq 1$ . При  $t = 0$  единственной отличной от нуля стыковочной функцией является  $B_0^3(0) = 1$ . При  $t = 1$  единственной ненулевой функцией является  $B_3^3(1) = 1$ . Т.о., кубическая кривая Бэзе всегда начинается в контрольной точке  $\mathbf{p}_0$  и заканчивается в контрольной точке  $\mathbf{p}_3$ . Другие функции,  $B_1^3$  и  $B_2^3$ , влияют на форму кривой в промежуточных значениях параметра  $t$ , так что получающаяся кривая притягивается к точкам  $\mathbf{p}_1$  и  $\mathbf{p}_2$ . Стыковочная функция  $B_1^3$  имеет максимум при  $t = 1/3$ ,  $B_2^3$  достигает максимума при  $t = 2/3$ .

Все четыре стыковочные функции не равны нулю во всем диапазоне изменения параметра  $t$  между контрольными точками. Т.о., кривые Бэзе не допускают *локального контроля* за формой кривой. Если переместить любую из контрольных точек, изменится вся кривая.

### 3.6. Поверхности Бэзе

Набор ортогональных кривых Бэзе можно использовать для проектирования поверхности объекта. Параметрическая векторная функция для поверхности Бэзе представляется декартовым произведением стыковочных функций Бэзе:

$$\mathbf{r}(t, \tau) = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n \mathbf{p}_{j,k} B_j^m(\tau) B_k^n(t),$$

где  $\mathbf{p}_{j,k}$  задают положения  $(m + 1) \times (n + 1)$  контрольных точек. Поверхности Бэзе имеют те же свойства, что и кривые Бэзе, и они являются удобным средством в приложениях интерактивного проектирования.

## В-сплайны и В-сплайновые поверхности

Данная категория сплайнов является наиболее используемой, и функции *В-сплайнов* широко применяются в системах автоматизированного проектирования и многих пакетах графического программирования. Подобно сплайнам Безье, В-сплайны генерируются путём аппроксимации набора контрольных точек. В то же время, В-сплайны обладают двумя преимуществами по сравнению со сплайнами Безье: во-первых, степень полинома В-сплайна можно задать независимо от числа контрольных точек (с определенными ограничениями), во-вторых, В-сплайны допускают локальный контроль над формой кривой. Платой за это является большая сложность В-сплайнов по сравнению со сплайнами Безье.

### 4.1. Уравнение В-сплайна

Общее выражение для расчёта координат точек В-сплайна для заданного набора из  $n + 1$  контрольных точек  $\mathbf{p}_k$ :

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{k=0}^n N_k^q(t) \mathbf{p}_k, \quad t_{\min} \leq t \leq t_{\max}, \quad 1 \leq q \leq n + 1.$$

Стыковочные функции  $N_k^q$  являются полиномами степени  $q - 1$  и определяются рекурсивными формулами Кокса-де Бура (Cox-deBoor):

$$N_k^1(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t_k \leq t \leq t_{k+1} \\ 0, & \text{в противном случае} \end{cases} \quad (4.1)$$

$$N_k^q(t) = \frac{t - t_k}{t_{k+q-1} - t_k} N_k^{q-1}(t) + \frac{t_{k+q} - t}{t_{k+q} - t_{k+1}} N_{k+1}^{q-1}(t),$$

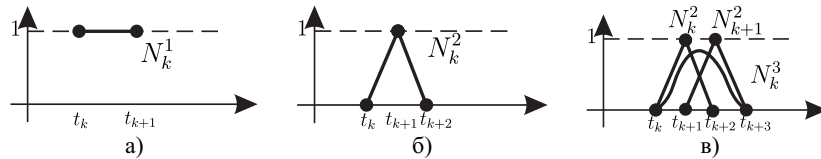


Рис. 18. Вид стыковочных функций для В-сплайнов  $N_k^q$

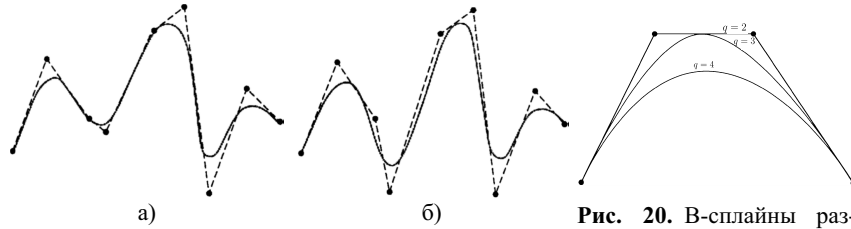


Рис. 19. Локальная модификация В-сплайна.

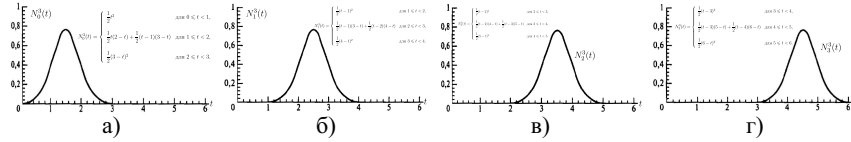
Рис. 20. В-сплайны различных степеней

где каждая стыковочная функция  $N_k^q$  определена на своем подынтервале (рис. 18). Каждая точка  $t_k$  называется *узлом* (knot), а полный набор точек называется *вектором узлов* (knot vector). Значения узлов можно выбирать любыми при условии, что  $t_k \leq t_{k+1}$ . В частности, расстояния между соседними узлами могут быть равны, тогда говорят о кратности узлов и параметров. В случае равенства нулю знаменателя, предполагается, что соответствующая дробь равна нулю.

На рис. 19 демонстрируются возможности В-сплайнов по локальному контролю. Изменение одной контрольной точки (рис. 19а) даёт кривую (рис. 19б), которая отличается от предыдущей только в окрестности изменённой контрольной точки. Помимо локального контроля В-сплайны позволяют варьировать число контрольных точек, используемых в разработке кривой, без изменения степени полинома.

#### 4.2. Свойства В-сплайнов

- В-сплайн имеет степень  $q - 1$  и непрерывность  $C^{q-2}$ .
- Чем меньше степень кривой тем ближе она подходит к контрольным точкам (рис. 20). Кривые высоких порядков более гладкие.
- Каждая стыковочная функция  $N_k^q$  определена на  $q$  подынтервалах общего диапазона  $t$ , начиная со значения узла  $t_k$ .
- В векторе узлов диапазон параметра  $t$  делится на  $n + q$  подынтервалов  $n + q + 1$  значениями.
- Если значения узлов обозначить  $\{t_0, t_1, \dots, t_{n+q}\}$ , получающийся В-сплайн определяется только в интервале от зна-



**Рис. 21.** Периодические квадратные стыковочные функции В-сплайна для равномерного целого вектора узлов

чения узла  $t_{q-1}$  до значения  $t_{n+1}$ , так как только в этом интервале  $\sum_{k=0}^n N_k^q(t) = 1$ .

- Каждый участок сплайна определяется  $q$  контрольными точками.
- Любая контрольная точка может влиять на форму максимум  $q$  участков кривой.

### 4.3. Равномерные периодические В-сплайны

Если расстояние между значениями в узлах постоянно, получающаяся в результате кривая называется *равномерным* В-сплайном. Например, можно задать следующий равномерный вектор узлов:  $\{-1.5; -1.0; -0.5; 0.0; 0.5; 1.0; 1.5; 2.0\}$ . Часто значения узлов нормируются в диапазон от 0 до 1:  $\{0.0; 0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0\}$ . Во многих приложениях удобно задать равномерные значения узлов с шагом 1 и начальным значением 0:  $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ . Равномерные В-сплайны имеют *периодические* стыковочные функции (рис. 21). Следовательно, для данных значений  $n$  и  $q$  все стыковочные функции имеют одинаковую форму. Каждая последующая стыковочная функция является просто смещённой версией предыдущей:

$$N_k^q(t) = N_{k+1}^q(t + \Delta t) = N_{k+2}^q(t + 2\Delta t), \quad (4.2)$$

где  $\Delta t$  — интервал между соседними значениями узлов.

На рис. 22 приведен график квадратного периодического В-сплайна для четырёх контрольных точек, выбранных на плоскости  $xy$ . Начальная и конечная точки являются взвешенным средним  $q - 1$  контрольных точек поэтому квадратный периодический В-сплайн начинается посередине между первыми двумя контрольными точками и заканчивается посередине между двумя последними. Параметрическая касательная кривой в начале

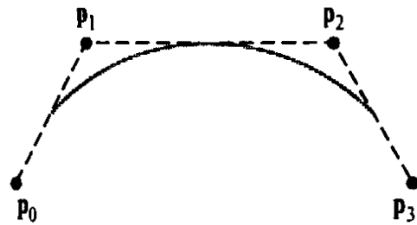


Рис. 22. Квадратный периодический В-сплайн

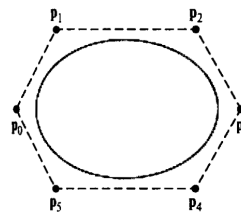


Рис. 23. Замкнутый периодический кусочно-гладкий В-сплайн

параллельна линии, соединяющей первые две контрольные точки, а параметрическая касательная в конце кривой параллельна линии, соединяющей последние две контрольные точки. Кроме того, как это было для кривых Безье, сплайновую кривую можно поместить ближе к любой контрольной точке, введя эту точку несколько раз (рис. 24).

#### 4.4. Кубические периодические В-сплайны

Кубические периодические В-сплайны широко используются в графических пакетах, особенно при генерации определённых замкнутых кривых. Например, замкнутую кривую, показанную на рис. 23, можно сгенерировать, циклически задав четыре из шести контрольных точек для каждого участка. Кроме того, если координаты трёх последовательных контрольных точек равны, кривая проходит через эту точку.

Для кубических В-сплайнов  $q = 4$ . Если нужно подобрать кубическую кривую по четырём контрольным точкам, можно использовать целочислен-

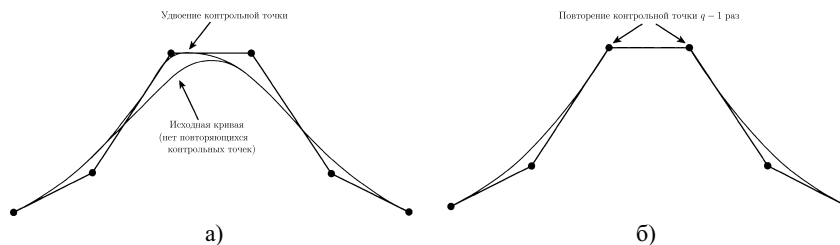


Рис. 24. Эффект от дублирования контрольных точек

ный вектор узлов  $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$  и рекуррентные соотношения (4.1), из которых находятся периодические стыковочные функции, как было сделано в предыдущем примере для квадратных периодических В-сплайнов.

Получив уравнение кривой для периодического кубического В-сплайна, рассмотрим альтернативную формулировку, начав с граничных условий и получив стыковочные функции, нормированные в интервал  $0 \leq t \leq 1$ . Граничные условия на периодические кубические В-сплайны для четырех контрольных точек, обозначенных  $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ , имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(0) &= \frac{1}{6}(\mathbf{p}_0 + 4\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2), & \mathbf{r}(1) &= \frac{1}{6}(\mathbf{p}_1 + 4\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3), \\ \mathbf{r}'(0) &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0), & \mathbf{r}'(1) &= \frac{1}{2}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Данные граничные условия подобны условиям для фундаментальных сплайнов: участки кривой определены четырьмя контрольными точками, и параметрические касательные в начале и в конце каждого участка кривой параллельны хордам, соединяющим соседние контрольные точки. Участок В-сплайна начинается в точке возле  $\mathbf{p}_1$  и заканчивается в точке вблизи  $\mathbf{p}_2$ .

Матричную формулировку кубического периодического В-сплайна с четырьмя контрольными точками можно записать следующим образом:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{M}_N \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{p}_0 \\ \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}_N = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $\mathbf{M}_N$  получается нахождением коэффициентов в общем выражении для кубического полинома, используя условия (4.3).

Граничные условия можно модифицировать так, чтобы они включали параметр натяжения  $u$  (как для фундаментальных сплайнов). Тогда

$$\mathbf{M}_{N_u} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -u & 12 - 9u & 9 - 12u & u \\ 3u & 12u - 18 & 18 - 15u & 0 \\ -3u & 0 & 3u & 0 \\ u & 6 - 2u & u & 0 \end{bmatrix}.$$

Стыковочные функции периодического кубического В-сплайна с параметром, меняющимся в диапазоне  $[0;1]$  имеют вид ( $u = 1$ ):

$$N_0^3(t) = \frac{1}{6}(1-t)^3, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

$$N_1^3(t) = \frac{1}{6}(3t^3 - 6t^2 + 4), \quad N_2^3(t) = \frac{1}{6}(-3t^3 + 3t^2 + 3t + 1), \quad N_3^3(t) = \frac{1}{6}t^3.$$

#### 4.5. Открытые равномерные В-сплайны

Данный класс В-сплайнов является промежуточным между равномерными и неравномерными В-сплайнами. Для *открытых равномерных* В-сплайнов, или просто *открытых* В-сплайнов, расстояние между узлами равномерно, за исключением концов, где значения узлов повторяются  $q$  раз. Пример открытого равномерного целочисленного вектора узлов:

$$\{0, 0, 0, 0, 1, 2, 2, 2, 2\} \quad \text{для } q = 4 \text{ и } n = 4.$$

Данный вектор можно нормировать в единичный интервал от 0 до 1:

$$\{0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1\} \quad \text{для } q = 4 \text{ и } n = 4.$$

Для любых значений параметров  $q$  и  $n$  открытый равномерный вектор узлов с целыми значениями можно сгенерировать, используя формулы

$$t_k = \begin{cases} 0 & \text{для } 0 \leq k < q, \\ k - q + 1 & \text{для } q \leq k \leq n, \\ n - q + 2 & \text{для } n < k \leq n + q. \end{cases}$$

Открытые равномерные В-сплайны обладают характеристиками, весьма подобными характеристикам сплайнов Безье. Фактически при  $q = n + 1$  открытые В-сплайны сводятся к сплайнам Безье, и все значения узлов равны 0 или 1. Например, при кубическом открытом В-сплайне ( $q = 4$ ) и четырех контрольных точках вектор узлов равен:

$$\{0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1\}.$$

Полиномиальная кривая для открытого В-сплайна соединяет первую и последнюю контрольную точку. Кроме того, параметрическая касательная кривой в первой контрольной точке параллельна прямой линии, сформированной первыми двумя контрольными точками, а параметрическая касательная

тельная в последней контрольной точке параллельна линии, определённой двумя последними контрольными точками. Таким образом, геометрические условия для согласования участков кривой не отличаются от условий для кривых Безье.

#### 4.6. Неравномерные В-сплайны

Для данного класса сплайнов вектор узлов может принимать любые значения из любых интервалов. Приведем несколько примеров:  $\{0; 1; 2; 3; 3; 4\}$ ,  $\{0; 2; 2; 3; 3; 6\}$ ,  $\{0; 0; 0; 1; 1; 3; 3; 3\}$ ,  $\{0; 0.2; 0.6; 0.9; 1.0\}$ .

Неравномерные В-сплайны предлагают повышенную гибкость в управлении формой кривой. Неравномерные интервалы в векторе позволяют получать различные формы стыковочных функций в различных интервалах, что может использоваться для воспроизведения определённых особенностей аппроксимации. В любой момент работы с неравномерным В-сплайном в состав кривой можно ввести дополнительный узел и изменить ее форму при помощи дополнительных контрольных точек. Увеличивая кратность узлов, можно настраивать траекторию кривой и вводить разрывы. Отметим также, что кратные значения узлов уменьшают непрерывность на 1 при каждом повторе значения.

#### 4.7. В-сплайновые поверхности

Формулировка В-сплайновой поверхности подобна формулировке поверхностных сплайнов Безье. Векторную функцию В-сплайновой поверхности можно получить, используя декартово произведение стыковочных В-сплайновых функций вида

$$\mathbf{r}(t, \tau) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{p}_{i,j} N_i^q(t) N_j^p(\tau),$$

где  $\mathbf{p}_{i,j}$  задают положения  $(n + 1)$  на  $(m + 1)$  контрольных точек.

В-сплайновые поверхности демонстрируют те же свойства, что и составляющие их В-сплайны. Поверхность можно построить по выбранным значениям параметров  $q$  и  $p$ , которые задают степени полиномов равными  $q - 1$  и  $p - 1$ . Для каждого параметра  $t$  и  $\tau$  выбираются значения вектора узлов, которые определяют диапазон параметров стыковочных функций.

## Задачи и порядок выполнения заданий

### 5.1. Лабораторная работа №1 «Интерполяция линейными сплайнами»

Цель работы: изучение методов интерполяции линейными сплайнами.

Задание: по заданным двумерным координатам контрольных точек построить линейный сплайн. Ввод координат контрольных точек осуществляется мышью в окне программы. Результатом работы программы должен являться вывод точек линейного сплайна с заданным шагом.

Продолжительность: 2 часа.

Исходные данные: шаблон программы (файл 1.cpp), написанный на языке C++ с применением библиотеки GLUT.

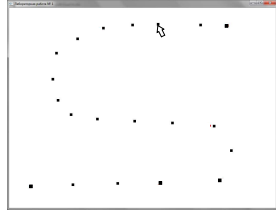
Описание. Шаблон программы содержит функции, позволяющие пользователю вводить координаты контрольных точек в окне программы при помощи мыши (рис. 25)

Контекстное меню, вызываемое правой кнопкой мыши, позволяет запустить расчёт линейного сплайна и вывести полученные точки с заданным шагом (команда «Линейный сплайн»). Команда «Ломаная линия» позволяет провести ломанную линию через контрольные точки средствами OpenGL (рис. 27).

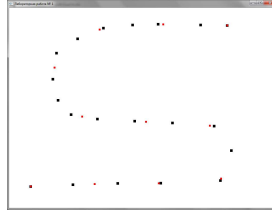
*Примечание.* В шаблоне комментарии, написанные прописными буквами, указывают места, в которых нужно добавить свой код.

Последовательность выполнения работы:

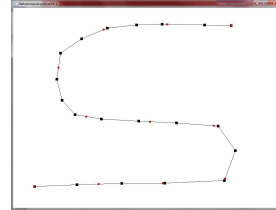
1. Подключить библиотеку GLUT (см. файл README-win32.txt).
2. В среде разработки (например, Visual Studio) создать пустое консольное приложение, скопировать в папку проекта файл шаблона программы и добавить этот файл в проект.
3. Скомпилировать проект, убедиться, что описанные функции для создания контрольных точек и меню работают.
4. В класс Point добавить новую переменную — параметрическую координату  $t$ .
5. При создании контрольной точки в функции addPoint добавить инициализацию параметрической координаты  $t$ .



**Рис. 25.** Ввод координат контрольных в окне программы с помощью мыши



**Рис. 26.** Построение промежуточных точек линейного сплайна



**Рис. 27.** Проверка принадлежности точек ломаной линии

*Примечание.* Существуют различные методы инициализации параметрической координаты. Простейший из них — равномерная инициализация, когда значения параметрической координаты распределяется равномерно между контрольными точками. Например, для первой точки  $t=0$ , для второй  $t=1$ , для третьей  $t=2$  и т.д. Недостатки данного метода могут проявиться при сильно неравномерном распределении контрольных точек в пространстве, когда расстояния между соседними контрольными точками значительно изменяются. Поэтому другие методы инициализации параметра  $t$  основываются на вычислении расстояния между контрольными точками. Например, для первой точки  $t=0$ . Для второй  $t = t_{\text{текущее}} + \text{евклидово расстояние между первой и второй точкой}$ . Для третьей точки  $t = t_{\text{текущее}} + \text{евклидово расстояние между второй и третьей точкой}$  и т.д. Для реализации последнего метода в функции `addPoint` добавлена переменная `ptPrev`, соответствующая предыдущей точке (для первой точки `ptPrev = текущей добавляемой точке`).

Для получения максимального балла за лабораторную работу рекомендуется протестировать оба метода инициализации параметрической координаты  $t$ .

6. В функции `calculateLineSplines` требуется написать код расчёта координат точек линейного сплайна `ptNew` в цикле для текущей пары контрольных точек `pt` и `ptNext`.

На рис. 26 показан иллюстрируется пример результата работы программы. Точки сплайна показаны красным цветом с равномерным шагом (всего 11 точек). Рассчитанные точки должны лежать на ломанной линии (рис. 27).

## 5.2. Лабораторная работа №2 «Интерполяция линейными поверхностными сплайнами»

Цель работы: изучение методов интерполяции линейными поверхностными сплайнами.

Задание: по заданной сетке трехмерных координат контрольных точек построить линейный поверхностный сплайн. Результатом работы программы должен являться вывод точек линейного поверхностного сплайна с заданным шагом.

Продолжительность: 2 часа.

Исходные данные: шаблон программы (файл 2.cpp), написанный на языке C++ с применением библиотеки GLUT.

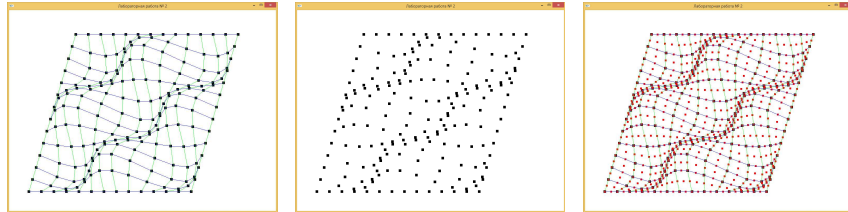
Описание. Шаблон программы содержит код, генерирующий сетку  $N\_ctr * M\_ctr$  трёхмерных координат контрольных точек  $PtCtr[i][j]$ . Для удобства просмотра точки соединены прямыми зелёными и синими линиями, показывающими координатные направления  $t$  и  $\tau$  соответственно (рис. 28).

Контекстное меню, вызываемое правой кнопкой мыши, позволяет запустить расчёт линейного поверхностного сплайна и вывести полученные точки с заданным шагом (команда «Линейный поверхностный сплайн»). Команда «Соединение ломанными» позволяет отключать и включать проведение ломанных линий через контрольные точки средствами OpenGL (рис. 29).

*Примечание.* В шаблоне комментарии, написанные прописными буквами, подсказывают места, в которых нужно добавить свой код.

Последовательность выполнения работы:

1. Подключить библиотеку GLUT (см. файл README-win32.txt).
2. В среде разработки (например, Visual Studio) создать пустое консольное приложение, скопировать в папку проекта файл шаблона программы и добавить этот файл в проект.
3. Скомпилировать проект, убедиться, что описанные функции для создания контрольных точек и меню работают.
4. В класс Point добавить новые переменные — параметрические координаты  $t$  и  $\tau$ .
5. В функции GenerateControlPoints для генерации контрольных точек добавить инициализацию параметрических координат  $t$  и  $\tau$ . Прин-



**Рис. 28.** Заданная сетка контрольных точек, соединённых ломанными

**Рис. 29.** Отключение проведения ломанных линий через контрольные точки

**Рис. 30.** Показ промежуточных точек линейного поверхностного сплайна

цип их инициализации полностью идентичен инициализации для линейной интерполяции, описанной в лабораторной работе №1 (на основе евклидовых расстояний между соседними точками или на основе их порядковых номеров).

Параметрическая координата  $t$ , изменяющаяся вдоль зелёных линий должна быть одинаковой для всех точек в сечениях синими линиями. Аналогичное правило действует и для параметрической координаты  $\tau$ , изменяющейся вдоль синих линий, а в каждом сечении зелёной линией она остаётся постоянной. В программе изменениям параметрических координат  $t$  и  $\tau$  отвечают изменения индексов  $i$  и  $j$  массива `PtListCtr`. Соответственно для каждого фиксированного значения  $i$  значение параметрической координаты  $t$  фиксировано для всех точек диапазона  $j$ .

Если координаты  $t$  и  $\tau$  рассчитываются исходя из расстояний между точками, то должно быть выбрано по одному из сечений зелёными и синими линиями (например, начальные сечения) — и **только** в этих сечениях нужно рассчитать расстояния и инициализировать значения параметров. Затем эти значения нужно перенести во все остальные точки в других сечениях.

6. В функции `calculateLineSurfaceSplines` требуется написать код расчёта координат точек линейного поверхностного сплайна `PtList`. Количество точек  $N \cdot M$ .

На рис. 30 показан иллюстрируется требуемый результат работы программы. Точки сплайна показаны красным цветом с равномерным шагом (всего  $27 \times 27$  точек).

### 5.3. Задачи для самостоятельного решения

Описание. В каждом варианте требуется разработать программу нахождения промежуточных точек с определяемым пользователем шагом для заданного типа двухмерного сплайна. При написании программ использовать шаблон и последовательность действий, разработанные для лабораторной работы №1.

#### Типы сплайнов:

1. Естественный кубический сплайн кривой. В качестве недостающих граничных условий использовать условия равенства нулю вторых производных в граничных точках.
2. Естественный кубический сплайн кривой. В качестве недостающего граничного условия использовать условие равенства производных в граничных точках.
3. Естественный кубический сплайн для замкнутой кривой.
4. Фундаментальный сплайн.
5. Сплайн Катмалла–Рома (Оувергаузера).
6. Сплайн Коханека–Бартелса.
7. Кубическая кривая Безье.
8. Кубическая кривая Безье, имеющая кусочную непрерывность первого порядка.
9. Кубическая кривая Безье, кусочно-непрерывная в  $C^2$ .
10. Кривая Безье степени  $n - 1$ .
11. Кубический периодический В-сплайн.
12. Кубический периодический В-сплайн, имеющий кусочную непрерывность первого порядка.
13. Равномерный периодический В-сплайн степени  $q - 1$ .
14. Открытый В-сплайн степени  $q - 1$ .
15. Неравномерный В-сплайн степени  $q - 1$ .

---

---

## Список литературы

---

---

1. Божко А.Н., Жук Д.М., Маничев В.Б. Компьютерная графика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2007. 392 с.
2. Бутакова Н.Г. Компьютерная графика. М.: МГИУ. 2008. 216 с.
3. Ву М., Девис Т., Нейдер Дж., Шрайнер Д. OpenGL. Руководство по программированию. СПб.: Питер. 2006. 624 с.
4. Голованов Н.Н. Геометрическое моделирование. М.: Издательство Физико-математической литературы. 2002. 472 с.
5. Дегтярев В.М. Компьютерная геометрия и графика. М.: Издательский центр «Академия». 2010. 212 с.
6. Залогова Л.А. Компьютерная графика. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2005. 192 с.
7. Квасов Б.И. Методы изометрической аппроксимации сплайнами. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований. 2006. 416 с.
8. Компьютерная геометрия / Н.Н. Голованов, Д.П. Ильютко, Г.В. Носовский, А.Т. Фоменко. М.: Издательский центр «Академия». 2006. 512 с.
9. Никулин Е.В. Компьютерная геометрия и алгоритмы машинной графики. СПб.: БХВ-Петербург. 2005. 576 с.
10. Порев В.Н. Компьютерная графика. СПб.: БХВ-Петербург. 2002. 432 с.
11. Ричард С., Райт-мл, Липчак Б. OpenGL супер книга. СПб.: Издательский дом «Вильямс». 2006. 1039 с.
12. Роджерс Д., Адамс Дж. Математические основы машинной графики. М.: Мир. 2001. 604 с.
13. Тарасов И.А. Основы программирования в OpenGL. М.: Горячая линия – телеком. 2000. 188 с.
14. Херн Д., Бейкер М.П. Компьютерная графика и стандарт OpenGL. М.: Издательский дом «Вильямс». 2005. 1168 с.
15. Эйнждед Э. Интерактивная компьютерная графика. Вводный курс на базе OpenGL. М.: Издательский дом «Вильямс». 2001. 592 с.
16. Dempksi K. Focus on Curves and Surfaces. Premier. 2003. 269 p.

---

---

## Оглавление

---

---

|  |    |
|--|----|
| <b>Введение</b> .....  | 4  |
| <b>Глава 1. Сплайновые представления</b> .....   | 5  |
| 1.1. Интерполяция и аппроксимация сплайнами .....  | 5  |
| 1.2. Условия непрерывности .....   | 6  |
| 1.3. Интерполяция линейными сплайнами .....  | 7  |
| <b>Глава 2. Методы интерполяции кубическими сплайнами</b> .....                          | 8  |
| 2.1. Постановка задачи .....   | 8  |
| 2.2. Естественные кубические сплайны .....   | 9  |
| 2.3. Эрмитова интерполяция .....   | 10 |
| 2.4. Фундаментальные сплайны .....   | 12 |
| 2.5. Сплайны Коханека–Бартелса .....   | 13 |
| 2.6. Поверхности Эрмита .....  | 14 |
| <b>Глава 3. Сплайновые кривые и поверхности Безье</b> .....                              | 15 |
| 3.1. Уравнения кривых Безье .....  | 15 |
| 3.2. Сплайновые представления .....  | 16 |
| 3.3. Свойства кривых Безье .....   | 16 |
| 3.4. Методы проектирования с использованием кривых Безье .....                           | 17 |
| 3.5. Кубические кривые Безье .....   | 18 |
| 3.6. Поверхности Безье .....   | 19 |
| <b>Глава 4. В-сплайны и В-сплайновые поверхности</b> .....                               | 20 |
| 4.1. Уравнение В-сплайна .....   | 20 |
| 4.2. Свойства В-сплайнов .....   | 21 |
| 4.3. Равномерные периодические В-сплайны .....   | 22 |
| 4.4. Кубические периодические В-сплайны .....  | 23 |
| 4.5. Открытые равномерные В-сплайны .....  | 25 |
| 4.6. Неравномерные В-сплайны .....   | 26 |
| 4.7. В-сплайновые поверхности .....  | 26 |
| <b>Глава 5. Задачи и порядок выполнения заданий</b> .....                                | 27 |
| 5.1. Лабораторная работа №1 «Интерполяция линейными сплайнами» .....                     | 27 |
| 5.2. Лабораторная работа №2 «Интерполяция линейными поверх-<br>ностными сплайнами» ..... | 29 |
| 5.3. Задачи для самостоятельного решения .....   | 31 |
| <b>Список литературы</b> .....   | 32 |

*Учебное издание*

**Захаров Андрей Алексеевич**

**Методы компьютерного построения кривых и поверхностей на  
основе сплайнов.**

Редактор *О. М. Королева*

Корректор *Л. Н. Петрова*

Компьютерная верстка *М. А. Голуба, А. А. Захарова*

Подписано в печать 19 мая 2014 г. Усл. печ. л. 1,00. Формат 60×84/16.

Тираж 300 экз. Изд. № 8.

Заказ

Издательство МГТУ им. Н. Э. Баумана.

Типография МГТУ им. Н. Э. Баумана.

105005, Москва, 2-я Бауманская ул., 5.