Лекция 1. Неопределённый интеграл и его свойства

Интегрирование по частям

Литература:

1) Зарубин В.С., Иванова Е.Е., Кувыркин Г.Н. Интегральное исчисление функций одного переменного (том VI из серии "Математика в техническом ун-те")
2) Агафонов С.А., Герман А.Д., Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения (том VIII из серии "Математика в технич. ун-те")
3) Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для ВТУЗов (т. 1, 2).
4) Сборник задач по математике для ВТУЗов (ч. 1, 2) / под ред. Ефимова А.В., Демидовича Б.П.
5) Задачи и упражнения по мат. анализу для ВТУЗов / под ред. Демидовича Б.П.
6) Филиппов А.Ф. Сборник задач по диф. ур-ям
7) mathmod. bmstu. ru → конспект лекций Иванова П.Л.

§1. Первообразная и её свойства

Опр. Функция $F(x)$ наз-ся первообразной ф-ии $f(x)$ на интервале $(a;b)$, если
1) $F(x)$ диф-ма на $(a;b)$
2) $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in (a;b)$.

Пример 1) $F(x) = x^3, \quad f(x) = 3x^2, \quad x \in \mathbb{R}$
2) $F(x) = \arcsin x, \quad f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}, \quad -1 < x < 1$
3) $F(x) = x^2$ и $G(x) = x^2+2$ — две первообразные ф-ии $f(x) = 2x$

Теор. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — две первообразные ф-и $f(x)$ на $(a;b)$. Тогда $F(x) - G(x) = Const$ (две первообразные отличаются на константу)

Д-во: Рассмотрим $\Phi(x) = F(x) - G(x)$.

$\Phi'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \Phi(x) = Const.$ ■

Лемма. Покажем, что если $\Phi'(x) = 0$, то $\Phi(x) = Const$, на $(a;b)$.

Д-во: Пусть $x_1, x_2 \in (a;b)$, $x_2 > x_1$.

По теореме Лагранжа:

$\Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi'(\xi)(x_2 - x_1) = 0$, т.к. $\Phi'(x) = 0 \; \forall x$.

$\Rightarrow \Phi(x_1) = \Phi(x_2) \Rightarrow \Phi(x) = const$ в силу произвольности точек x_1, x_2. ■

Опр. Совокупность всех первообразных ф-и $f(x)$ наз. <u>неопределённым</u> <u>интегралом</u> этой функции.

Обозн.: $\int f(x)\,dx$

$f(x)$ — подынтегральная ф-я,

$f(x)dx$ — подынтегральное выражение,

x — переменная интегрирования

$\int f(x)dx = F(x) + C$,

если $F(x)$ — некоторая первообразная ф-и $f(x)$. Все первообразные отличаются на постоянную.

Опр Восстановление функции по её производной наз. <u>интегрированием</u>.

§2. Свойства неопределённого интеграла

Рассмотрим некоторые св-ва неопр. $\int$-ла, непосредственно вытекающих из опр-я.

① $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

Д-во: $(f(x)+C)' = f'(x)$. ∎

② $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$; $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx$

Д-во: Пусть $F(x)$ - некоторая первообразная ф-и $f(x)$.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)\ ;\quad d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)\,dx.$$ ∎

③ Линейность неопр. интеграла

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx$$

Д-во: Пусть
$F(x)$ - первообразная $f(x)$;
$G(x)$ - первообразная $g(x)$.
Рассмотрим $\alpha F(x) + \beta G(x)$:

$(\alpha F(x) + \beta G(x))' = \alpha F'(x) + \beta G'(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$

$\Rightarrow \alpha F(x) + \beta G(x)$ - первообразная ф-и $\alpha f(x) + \beta g(x)$

$\Rightarrow \int (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + C$

С другой стороны,

$\alpha \int f(x)\,dx + \beta \int g(x)\,dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + \alpha C_1 + \beta C_2$

$\alpha C_1 + \beta C_2$ описывают то же множество, что и C. ∎

Т. о.,
1) константу можно выносить за знак $\int$-ла,
2) $\int$-л от суммы равен сумме интегралов

§3. Таблица основных неопр. интегралов

① $\int x^{\alpha}\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \alpha \neq -1$

② $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$

③ $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;\quad \int e^x\,dx = e^x + C$

④ $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

⑤ $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

⑥ $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$ ⑦ $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$

⑧ $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C$

⑨ $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;\quad \int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$

"Высокий

⑩ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + C$ ← "длинный логарифм"

логарифм"

⑪ $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C$

⑫ $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C;$ ⑬ $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C$

⑭ $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C;$ ⑮ $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$

⑯ $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right| + C$

⑰ $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \cancel{\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|} = \ln|\operatorname{tg} x + \sec x| + C$

$\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C$

§4. Интегрирование подстановкой и заменой переменной.

① **Теор** (интегрирование подстановкой)

Пусть ф-я $f(x)$ определена на промежутке X и имеет на нем первообразную $F(x)$, пусть ф-я $\varphi(t)$ опр-на и диф-ма на пром-ке T, причем $\varphi(T) \subset X$. Тогда ф-я $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ имеет первообразную на T, равную $F(\varphi(t))$, т.е.

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C$$

Д-во: Рассмотрим $F(\varphi(t))$. По правилу дифференцирования сложной ф-и:

$$(F(\varphi(t)))' = F'(x)\Big|_{x=\varphi(t)} \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$

на T $\to \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$. ∎

Замечание. При практическом применении этой формулы часто используют формальный прием, кот. наз. "подведение под знак дифференциала":

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t))\, d\varphi(t) = F(\varphi(t)) + C$$

Примеры.

① $\int \cos^2 x \sin x\, dx = -\int \cos^2 x\, d\cos x = -\dfrac{\cos^3 x}{3} + C$

② $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \int \dfrac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \int \dfrac{dx}{tg\frac{x}{2} \cdot 2\cos^2\frac{x}{2}} = \int \dfrac{d\,tg\frac{x}{2}}{tg\frac{x}{2}} =$

$= \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C$

② Теор. (об интегрировании заменой переменной).

1) Пусть ф-я $\varphi(t)$ диф-ма на T и взаимно однозначно отображает его на промежуток X, причем $\varphi'(t) \neq 0$ на T.

2) Пусть ф-я $f(x)$ опр-на на X.

Тогда, если

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C,$$

то на X

$$\int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C,$$

где $\varphi^{-1}(x)$ - ф-я, обратная к $\varphi(t)$.

Д-во: Обозначим $x = \varphi(t)$, тогда $t = \varphi^{-1}(x)$.

Из формулы

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C \quad \text{следует}$$

$$\int f(x)dx = F(\varphi^{-1}(x)) + C. \blacksquare$$

Примеры.

① $$\int x\sqrt{x+1}\,dx = \left\{\begin{matrix} \sqrt{x+1} = t \\ x = t^2-1 \\ dx = 2tdt \end{matrix}\right\} = \int (t^2-1)\cdot t\cdot 2tdt =$$

$$= 2\int(t^4-t^2)dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right) + C = 2\left(\frac{\sqrt{(x+1)^5}}{5} - \frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3}\right) + C$$

② $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \left\{\begin{matrix} x = \frac{1}{t};\ t = \frac{1}{x} \\ dx = -\frac{dt}{t^2} \end{matrix}\right\} = \int \frac{-\frac{dt}{t^2}}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = -\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= -\arcsin t + C = -\arcsin\frac{1}{x} + C$$

§5. Формула интегрирования по частям.

Теор (ф-ла интегрирования по частям).
Пусть ф-и $u(x)$, $v(x)$ диф-мы на X, существует первообразная ф-и $u'(x)\,v(x)$. Тогда существует первообразная ф-и $u(x)\,v'(x)$, причём

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx, \quad x\in X.$$

Д-во: По правилу диф-я произведения:
$$(u(x)v(x))' = u'(x)\,v(x) + v'(x)\,u(x)$$
Вычислим неопр. инт-лы от левой и правой частей равенства:
$$\int (u(x)v(x))'\,dx = \int u'(x)v(x)\,dx + \int u(x)\,v'(x)\,dx$$
Согласно св-ву ① неопр. интеграла:
$$\int (u(x)v(x))'\,dx = u(x)\,v(x) + C$$
отнеся C к неопр. интегралу $\int v(x)u'(x)\,dx$, получим
$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Замечание. В кратком виде эту формулу можно записать в виде:
$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Пример

① $\int \ln x\,dx = x\ln x - \int x\,d\ln x = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx =$

$= x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$

Случаи применения формулы интегрирования по частям:

① $\int x^n \ln x\,dx$, $\int x^n \arcsin x\,dx$, $\int x^n \operatorname{arctg} x\,dx$, $\int x^n \arccos x\,dx$, где n – целое неотриц. число.

В этих интегралах полагают $u = \ln x$, $\arcsin x, \ldots$, $dv = x^n dx$

② $\int x^n e^{ax}\,dx$, $\int x^n \sin bx\,dx$, $\int x^n \cos bx\,dx$, где n – натур число.
В этих интегралах полагают $u = x^n$, $dv = e^{ax}dx$, $dv = \sin bx\,dx, \ldots$

<u>Пример.</u> $\int x e^x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{matrix} \right\} = x\cdot e^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

③ $\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $\int e^{ax}\sin bx\,dx$.
Здесь в качестве $u(x)$ можно взять любую функцию.