Лекция 2. Приемы интегрирования - 1

§1. Интегрирование выражений, содержащих квадратный трёхчлен.

① Вычисление интегралов вида $\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx$

а) если $m=0$, то приводим квадратный трёхчлен к виду $ax^2+bx+c = a(u^2 \pm k^2)$, т.е. выделяем полный квадрат
б) если $m \neq 0$, то выделяем в числителе производную квадратного трёхчлена в знаменателе:

$$\int \frac{mx+n}{ax^2+bx+c}\,dx = \int \frac{\frac{m}{2a}(2ax+b) + \left(n - \frac{mb}{2a}\right)}{ax^2+bx+c}\,dx =$$

$$= \frac{m}{2a} \ln|ax^2+bx+c| + \left(n - \frac{bm}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

Второй интеграл сводится к случаю а

② Вычисление интегралов вида $\int \frac{mx+n}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$

производится аналогично, но сводится к другим табличным интегралам

③ Вычисление интегралов вида

$\int \frac{dx}{(dx+e)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ или $\int \frac{mx+n}{(dx+e)^2\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$.

Сначала делаем замену $\frac{1}{dx+e} = t$, это приводит интеграл к виду ②, для вычисления которого применяем известн. методы

Пример.
$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2}} = \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{x-1} &= t \\ x-1 &= \frac{1}{t} \\ dx &= -\frac{dt}{t^2} \end{aligned} \right\} = -\int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t} \cdot \sqrt{\left(1+\frac{1}{t}\right)^2-2}} =$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{1+2t-t^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{2-(t-1)^2}} = -\arcsin \frac{t-1}{\sqrt{2}} + C =$$

$$= -\arcsin \frac{\frac{1}{x-1}-1}{\sqrt{2}} + C = -\arcsin \frac{2-x}{(x-1)\sqrt{2}} + C$$

§2. Интегрирование рацион. дробей

Рассмотрим алгебраический многочлен n-ой степени:

$$p_n(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_{n-1} x + c_n,$$

где c_i — коэф-ты многочлена, n - порядок многочлена.

Многочлен $p_n(x)$ можно разложить на множители следующим образом:

$$p_n(x) = c_0 (x-\alpha_1)^{k_1} (x-\alpha_2)^{k_2} \dots (x-\alpha_r)^{k_r} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{\ell_1} \dots (x^2 + p_s x + q_s)^{\ell_s},$$ где

$k_1 + k_2 + \dots + k_r + 2(\ell_1 + \dots + \ell_s) = n,$

$\alpha_1, \dots, \alpha_r$ - действит. корни многочлена,

$k_1, \dots, k_r$ - их кратности;

многочлены $x^2 + p_i x + q_i$ не имеют действит. корней

<u>Опр.</u> <u>Рациональной</u> дробью наз. отношение $\frac{P(x)}{Q(x)}$ двух алгебраических многочленов.

Если $\deg P(x) < \deg Q(x)$, то рациональная дробь наз. <u>правильной</u>, иначе — <u>неправильной</u>.

Если дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ неправильная, то, поделив $P(x)$ на $Q(x)$ с остатком, получим многочлен + правильную дробь.

Правильную дробь $\frac{P(x)}{Q(x)}$ можно представить в виде суммы простейших дробей.

<u>Опр.</u> Правильные дроби вида

$$\frac{a}{(x-b)^\beta}, \quad \frac{mx+n}{(x^2+px+q)^\lambda}$$

наз. <u>простейшими</u>.

Теор. (о разложении правильной дроби на сумму простейших). Всякая правильная рацион. дробь, знаменатель которой представлен в виде

$$Q(x) = c_0 (x-\alpha_1)^{k_1} \dots (x-\alpha_r)^{k_r} (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \dots (x^2+p_sx+q_s)^{l_s}$$

представляется в виде суммы простейших дробей следующим образом:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x-\alpha_1} + \dots + \frac{A_{1k_1}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \dots + \frac{A_{r1}}{x-\alpha_r} + \dots + \frac{A_{rk_r}}{(x-\alpha_r)^{k_r}} +$$

$$+ \frac{B_{11}x + C_{11}}{x^2+p_1x+q_1} + \dots + \frac{B_{1l_1}x + C_{1l_1}}{(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}} + \dots +$$

$$+ \frac{B_{s1}x + C_{s1}}{x^2+p_sx+q_s} + \dots + \frac{B_{sl_s}x + C_{sl_s}}{(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}$$

причем это представление единственно с точностью до порядка слагаемых. □.

Коэффициенты A_{ij}, B_{ij}, C_{ij} являются неопределенными.

Пример Разложить дробь на сумму простейших дробей без вычисления неопр. коэффициентов:

$$\frac{2x^2+7}{x^3(x+1)^2(x^2+2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+1} + \frac{E}{(x+1)^2} +$$

$$+ \frac{Ex+G}{x^2+2} + \frac{Ix+K}{(x^2+2)^2}$$

Для нахождения неопр. коэф-тов можно применять след. методы:

① метод неопр. коэф-тов

Сумма прост. дробей приводится к общему знаменателю, после чего приравниваются коэф-ты при одинаковых степенях. Это дает линейную систему уравнений для определения неопр. коэф-тов.

Пример. Разложить дробь на сумму простейших:

$$\frac{3x+14}{(x^2-4)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} = \frac{A(x^2+5x+6)+B(x^2+x-6)+C(x^2-4)}{(x^2-4)(x+3)}$$

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x: \\ 1: \end{array} \begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+B=3 \\ 6A-6B-4C=14 \end{cases} \Rightarrow A=1,\ B=-2,\ C=1.$$

Получаем разложение:

$$\frac{3x+14}{(x^2-4)(x+3)} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3}$$

② Метод ~~неопр. коэффициентов~~ конкретных значений

После приведения к общему знаменателю и получения тождества придают конкретные значения переменной x, что позволяет получить систему уравнений для определения неопр. коэф-тов. Обычно вместо x подставляют значения действит. корней многочлена в знаменателе.

Пример. Разложить дробь на сумму прост.

$$\frac{3x+14}{(x^2-4)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} = \frac{A(x+2)(x+3)+B(x-2)(x+3)+C(x^2-4)}{(x^2-4)(x+3)}$$

$$\begin{array}{lll} x=2: & 20A=20 & \Rightarrow A=1 \\ x=-2: & -4B=8 & \Rightarrow B=-2 \\ x=-3: & 5C=5 & \Rightarrow C=1 \end{array} \Rightarrow \frac{3x+14}{(x^2-4)(x+3)} = \frac{1}{x-2} - \frac{2}{x+2} + \frac{1}{x+3}$$

Эти методы можно применять в сочетании, получив часть уравнений с помощью метода неопр. коэф-тов, часть — с помощью метода конкретных значений.

Схема интегрирования рац. дроби:

1) Если дробь неправильная, поделить числитель на знаменатель с остатком и представить дробь в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби
2) Разложить правильную рациональную дробь на сумму простейших
3) Проинтегрировать простейшие дроби и многочлен, если он есть

Интегр-е простейших дробей:

1) $\frac{B}{x-b}$: $\int \frac{B}{x-b}dx = B\ln|x-b| + C$

2) $\frac{B}{(x-b)^\beta}$: $\int \frac{B}{(x-b)^\beta}dx = \frac{B}{-\beta+1}(x-b)^{-\beta+1} + C$, $\beta > 1$

3) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}dx$ – рассмотрим в §1.

4) $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}dx$, $\lambda > 1$:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^\lambda}dx = \left\{\begin{array}{l} x+\frac{p}{2} = t \\ x = t-\frac{p}{2} \\ dx = dt \end{array}\right\} = \int \frac{Mt+N-\frac{Mp}{2}}{(t^2+q-\frac{p^2}{4})^\lambda}dt =$$

$$= \left[\begin{array}{l} N-\frac{Mp}{2} = r \\ q-\frac{p^2}{4} = s^2 \end{array}\right] = \int \frac{Mt+r}{(t^2+s^2)^\lambda}dt = \int \frac{M\,t\,dt}{(t^2+s^2)^\lambda} + \int \frac{r\,dt}{(t^2+s^2)^\lambda} =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{d(t^2+s^2)}{(t^2+s^2)^\lambda} + r\int \frac{dt}{(t^2+s^2)^\lambda} = \frac{M}{2(-\lambda+1)}(t^2+s^2)^{-\lambda+1} + r I_\lambda,$$

где $I_\lambda = \int \frac{dt}{(t^2+s^2)^\lambda}$ вычисляется по частям следующим образом:

$$I_\lambda = \int \frac{dt}{(t^2+s^2)^\lambda} = \frac{t}{(t^2+s^2)^\lambda} + \int \frac{2t^2\cdot\lambda}{(t^2+s^2)^{\lambda+1}}dt = \frac{t}{(t^2+s^2)^\lambda} +$$

$$+ 2\lambda\int \frac{t^2+s^2-s^2}{(t^2+s^2)^{\lambda+1}}dt = \frac{t}{(t^2+s^2)^\lambda} + 2\lambda\cdot I_\lambda - 2\lambda s^2 I_{\lambda+1}$$ –

получили соотношение, связ. I_λ и $I_{\lambda+1}$.

I_1 вычисляется, как в (3), а далее

$$I_{\lambda+1} = \frac{2\lambda-1}{2\lambda s^2} I_\lambda + \frac{1}{2\lambda s^2} \cdot \frac{t}{(t^2+s^2)^\lambda}$$

Пример. Проинтегрировать неправ. рац. дробь $\int \frac{x^4}{x^3+1} dx$:

$$\int \frac{x^4}{x^3+1} dx = \int \frac{x^4+x-x}{x^3+1} dx = \int \left(x - \frac{x}{x^3+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \int \frac{x\,dx}{x^3+1}$$

Вычислим теперь интеграл $\int \frac{x\,dx}{x^3+1}$.

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2-x+1)}$$

$$\begin{array}{l} x^2: \\ x=0: \\ x=-1: \end{array} \begin{cases} A+B=0 \\ A+C=0 \\ 3A=-1 \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{3};\ B = \frac{1}{3};\ C = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\int \frac{x}{x^3+1} dx = \int \frac{-1/3}{x+1} dx + \frac{1}{3} \int \frac{x+1}{x^2-x+1} dx = -\frac{1}{3} \ln|x+1| +$$

$$+ \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{(2x-1)dx}{x^2-x+1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \int \frac{dx}{x^2-x+1} = -\frac{1}{3} \ln|x+1| +$$

$$+ \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-1/2}{\sqrt{3}/2} + C = -\frac{1}{3} \ln|x+1| + \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$

Отсюда:

$$\int \frac{x^4}{x^3+1} dx = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \ln|x+1| - \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$$