Лекция 3. Приемы интегрирования-2

§1. Интегрирование тригоном. функций

① $\int \sin^m x \cos^n x \, dx$, где m, n — целые числа

1) $m = 2k+1$ — нечетное положит. число $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int \sin^{2k+1} x \cos^n x \, dx = -\int (1-\cos^2 x)^k \cos^n x \, d\cos x =$

$= \{\cos x = t\} = -\int (1-t^2)^k t^n dt$ — степенная ф-я

2) $n = 2k+1$ — вычисляется аналогично, но под знак диф-ла подводится $\cos x$

Пример. $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \int \sin^4 x \cdot (1-\sin^2 x) \, d\sin x =$

$= \int (\sin^4 x - \sin^6 x) \, d\sin x = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + C$

3) Если оба числа m и n — четные положит. числа, то исп-ем формулы понижения степ.:

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$; $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$;

$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

② $\int R(\sin^2 x, \cos^2 x) \, dx$, $\int R(\operatorname{tg} x) \, dx$, где R — рациональная функция.

Используют замену $t = \operatorname{tg} x$. Тогда

$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$

$x = \operatorname{arctg} t$ $\qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}$

$\Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$

Получим интеграл от степенной функции:

$\int R\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t^2}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2}$ или $\int R(t) \frac{dt}{1+t^2}$

Пример. $\int \frac{dx}{1+\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} + \operatorname{tg}^2 x\right)} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{2\operatorname{tg}^2 + 1} =$

$= \{t = \operatorname{tg} x\} = \int \frac{dt}{1+2t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} t) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \operatorname{tg} x) + C$

③ $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, где R – рацион. функция своих аргументов, приводится к интегралу от рацион. дроби заменой переменной $t = tg\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \left\{:\cos^2\frac{x}{2}\right\} = \frac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \left\{:\cos^2\frac{x}{2}\right\} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x = 2\,arctg\,t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

Пример. $\int\frac{dx}{1+\sin x} = \left\{\begin{matrix} t = tg\frac{x}{2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2};\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\end{matrix}\right\} = \int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} =$

$$= 2\int\frac{dt}{t^2+1+2t} = 2\int\frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{2}{t+1}+C = -\frac{2}{tg\frac{x}{2}+1}+C$$

④ $\int\sin\alpha x\sin\beta x\,dx$, $\int\cos\alpha x\cos\beta x\,dx$, $\int\sin\alpha x\cos\beta x\,dx$ – вычисляются с помощью формул:

$$\sin\alpha x\sin\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x - \cos(\alpha+\beta)x]$$

$$\cos\alpha x\cdot\cos\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)x + \cos(\alpha+\beta)x]$$

$$\sin\alpha x\cdot\cos\beta x = \frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)x + \sin(\alpha+\beta)x]$$

⑤ $\int tg^m x\,dx$, $\int ctg^m x\,dx$ вычисляются с помощью формул:

$$tg^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}-1;\quad ctg^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}-1,$$

а также с помощью рекуррентной формулы:

$$\int tg^{m+2}x\,dx = \int tg^m x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \int tg^m x\,d\,tgx -$$

$$-\int tg^m x\,dx = \frac{tg^{m+1}x}{m+1} - \int tg^m x\,dx$$

Аналогично для $\int ctg^m x\,dx$

⑥ $\int \frac{dx}{\sin^p x \cos^q x}$,

1) $p+q=2k$, вычисляются с помощью замены $t=\operatorname{tg}x$, $t=\operatorname{ctg}x$

Пример. $\int \frac{dx}{\sin^3 x\cos x} = \{:\cos^4 x\} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}dx}{\frac{1}{\cos^4 x}\cdot\sin^3 x\cdot\cos x} =$

$= \int \frac{(\operatorname{tg}^2 x+1)\,d\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}^3 x} = \{\operatorname{tg}x = t\} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t^3} = \int\frac{dt}{t^3} + \int\frac{dt}{t^3} =$

$= -\frac{1}{2t^2} + \ln|t| + C = -\frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} + \ln|\operatorname{tg}x| + C$

2) В ост. случаях используем основное тригонометрическое тождество: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

Пример. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos^2 x}dx = \int\frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x} +$

$+\int\frac{dx}{\sin x} = -\int\frac{d\cos x}{\cos^2 x} + \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| = \frac{1}{\cos x} + \ln|\operatorname{tg}\frac{x}{2}| + C$

§2. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

(1) Интегралы вида $\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_1}{m_1}}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{r_2}{m_2}}, \ldots\right)dx$, где R — рациональная функция своих аргументов, $r_1, r_2, \ldots$ — целые числа, $m_1, m_2, \ldots$ — натур. числа, вычисляются заменой переменной

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^q, \quad q = \text{НОК}(m_1, m_2, \ldots)$$

__Пример__ $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}} = \left\{\begin{array}{l} x = t^4 \\ dx = 4t^3\,dt \end{array}\right\} = \int \frac{4t^3\,dt}{t^2-t} =$

$= 4\int \frac{t^2\,dt}{t-1} = 4\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right)dt = 2t^2+4t+4\ln|t-1|+C =$

$= 2\sqrt{x} + 4\sqrt[4]{x} + 4\ln|\sqrt[4]{x}-1| + C$

(2) Интегралы вида $\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$ после выделения полного квадрата вычисляются по частям. Получим:

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) + C$$

$$\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C$$

(3) Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ может быть вычислен выделением полного квадрата в квадратном трёхчлене и последующей заменой $x + \frac{b}{2a} = t$. Каждый из полученных интегралов может быть вычислен тригонометрической заменой:

1) $\int R\left(u, \sqrt{m^2-u^2}\right)du \to u = m\sin t$

2) $\int R\left(u, \sqrt{u^2-m^2}\right)du \to u = \frac{m}{\cos t}$

3) $\int R\left(u, \sqrt{u^2+m^2}\right)du \to u = m\,\mathrm{tg}\,t$

Пример. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx = \left\{ \begin{matrix} x = 2\sin t \\ dx = 2\cos t\,dt \end{matrix} \right\} =$

$$= \int \frac{4\sin^2 t}{\sqrt{4-4\sin^2 t}} \cdot 2\cos t\,dt = \int 4\sin^2 t\,dt =$$

$$= \int 2(1-\cos 2t)dt = 2t - \sin 2t + C = \left\{ \begin{matrix} t = \arcsin\frac{x}{2} \\ \sin t = \frac{x}{2} \\ \cos t = \frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2} + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C$$

§ 3. Неберущиеся интегралы

Не все интегралы от элементарных ф-ий могут быть вычислены с помощью элементарных функций. Такие интегралы наз. неберущимися. Примеры:

$$\int \frac{\sin x}{x}dx, \int \frac{\cos x}{x}dx, \int \frac{e^x}{x}dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x^n}dx, \int \frac{\cos x}{x^n}dx, \int \frac{e^x}{x^n}dx, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\int e^{x^2}dx, \int \sin x^2\,dx, \int \cos x^2\,dx, \int \frac{dx}{\ln x}$$

и многие другие

§4. Понятие определённого интеграла

Пусть ф-я $f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$.

<u>Опр.</u> Мн-во точек

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

наз. <u>разбиением</u> отрезка $[a;b]$, при этом отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, наз. <u>отрезками разбиения</u>, длина i-того отрезка обозн. $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, число $\lambda(\tau) = \max\limits_i \Delta x_i$ наз. <u>диаметром разбиения</u> τ.

Рассмотрим некоторое разбиение отр. $[a;b]$. В каждом из отрезков разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ выберем т. ξ_i, $i = \overline{1,n}$. Составим сумму:

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

<u>Опр.</u> Эта сумма наз. <u>интегральной суммой</u> ф-и $f(x)$, соответствующей разбиению τ.

<u>Опр.</u> Число I наз. <u>определённым интегралом</u> ф-и $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$, такое, что для любого разбиения σ, диаметр которого $d(\sigma) < \delta$, имеет место нер-во:

$$\left| I - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \right| < \varepsilon,$$

и оно вып. при любом способе выбора точек $\xi_1, \ldots, \xi_n$.

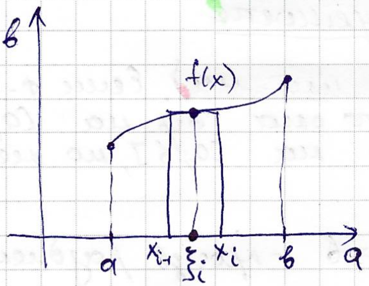
Обозн.: $I = \int\limits_a^b f(x)\,dx$, a – нижний предел $\int$-е, b – верхний предел $\int$-е

Определение означает, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{d(\sigma)\to 0} f(\xi_i)\Delta x_i$$

<u>Опр.</u> Ф-е $f(x)$ наз. <u>интегрируемой</u> на отр. $[a;b]$, если указанный предел для неё $\exists$-ет и конечен.

Геометрическая интерпретация опр. интеграла:



площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком ф-и $f(x)$, осью Ox и вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$.

Пример. Рассмотрим ф-ю $f(x) = C$ на произвольном отрезке $[a; b]$.

Пусть $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ — произвольное разбиение отр. $[a; b]$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — выбранные на $[x_{i-1}; x_i]$ точки, $i = \overline{1,n}$.

Интегральная сумма:

$$S(\sigma) = f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n =$$

$$= C(x_1 - x_0) + \ldots + C(x_n - x_{n+1}) =$$

$$= C(x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + \ldots + x_n - x_{n+1}) = C(x_n - x_0) = C(b-a).$$

отсюда

$$\lim_{d(\sigma)\to 0} S(\sigma) = \lim_{d(\sigma)\to 0} C(b-a) = C(b-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_a^b C\,dx = C(b-a)}$$