# Лекция 4. Свойства определенного интеграла

## §1. Условия интегрируемости

**Теор** (о необх. условии инт-ти). Если ф-я $f(x)$ интегр-ма на $[a;b]$, то она огр. на $[a;b]$.

**Д-во**: Пусть $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$, но не огр. на $[a;b]$.

Пусть задано

$\sigma: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ – произв. разбиение отрезка $[a;b]$.

$f(x)$ не огр. на $[a;b]$ $\Rightarrow$ она не огр. хотя бы на одном из отр. разбиения $[x_{m-1}; x_m]$.

Составим интегральную сумму:

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = f(\xi_m)\Delta x_m + \sum_{k \neq m} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Будем считать точки $\xi_k$, $k \neq m$, фиксированными. Тогда $\xi_m$ можно выбрать так, что $f(\xi_m)$ будет сколь угодно большой $\Rightarrow S(\sigma)$ будет сколь угодно большой $\Rightarrow f(x)$ не интегрируема. Противоречие. ∎

**Пример**. Функция Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ рационально} \\ 0, & x \text{ иррационально} \end{cases}$$

на произв. отрезке.

Пусть $\sigma$ – произвольное разбиение отр.

Тогда, ~~если~~, если $\xi_k$ рациональны, то

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = x_n - x_0 = b - a$$

Если $\xi_k$ иррациональны, то

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_k = 0$$

$S(\sigma)$ зависит от выбора точек разбиения $\Rightarrow$ ф-я $\chi(x)$ не интегрируема

Опр. Функция $f(x)$ наз. кусочно-непр.* на отр. $[a;b]$, если сущ-ет разбиение
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b,$$
такое, что $f(x)$ непр. на каждом интервале разбиения $(x_{k-1}, x_k)$, при этом ∃-ют и конечны пределы
$$\lim_{x\to x_{k-1}+} f(x), \quad \lim_{x\to x_k -} f(x), \quad k=\overline{1,n}.$$

Замечание. Таким образом, ф-я $f(x)$ кусочно-непр. на отрезке $[a;b]$, если она непр. в каждой точке отрезка, за исключением конечного числа точек разрыва I рода.

Теор (Достаточное условие инт-сти). Если $f(x)$ кусочно-непр. на $[a;b]$, то она интегрируема на $[a;b]$. □

## §2. Свойства определённого интеграла

① $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

② $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

③ Если $f(x)$, $g(x)$ инт-мы на $[a;b]$, то $f(x)\cdot g(x)$, $|f(x)|$, $|g(x)|$ инт-мы на $[a;b]$.

④ (Линейность опр. интеграла). Если $f(x)$, $g(x)$ инт-мы на $[a;b]$, то ф-я $\lambda f(x)+\mu g(x)$ инт-ма на $[a;b]$ и

$$\int_a^b(\lambda f(x)+\mu g(x))\,dx = \lambda\int_a^b f(x)\,dx + \mu\int_a^b g(x)\,dx$$

Д-во: Составим интегр. сумму ф-и $\lambda f(x)+\mu g(x)$, соотв. произвольному разбиению $\sigma$ и произв. выбору точек $\xi_k$, $k=\overline{1,n}$:

$$\sum_{k=1}^n(\lambda f(\xi_k)+\mu g(\xi_k))\Delta x_k = \lambda\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta x_k + $$
$$+\mu\sum_{k=1}^n g(\xi_k)\Delta x_k.$$

Т.к. $f(x)$, $g(x)$ инт-мы на $[a;b]$, то

$$\lim_{d(\sigma)\to 0}\sum_{k=1}^n(\lambda f(\xi_k)+\mu g(\xi_k))\Delta x_k =$$
$$=\lambda\lim_{d(\sigma)\to 0}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)+\mu\lim_{d(\sigma)\to 0}\sum_{k=1}^n g(\xi_k) = \lambda\int_a^b f(x)\,dx +$$
$$+\mu\int_a^b g(x)\,dx. \blacksquare$$

⑤ Если $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$, то она инт-ма на $\forall$ отр. $[c;d]\subset[a;b]$. □

⑥ (Аддитивность). Если $f(x)$ интегр-ма на $[a;b]$, $a<c<b$, то $f(x)$ интегрируема на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$ и

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Д-во: Функция $f(x)$ инт-ма на отрезках $[a;c]$ и $[c;b]$ по св-ву 5).

Т.к. $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$, можно ограничиться рассмотрением тех разбиений отр., кот. содержат т. $c$. Составим интегр. сумму:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \sum_{[a;c]} f(\xi_k)\Delta x_k + \sum_{[c;b]} f(\xi_k)\Delta x_k$$

пусть $\sigma_1$ – разбиение отр. от т. $a$ до т. $c$,
$\sigma_2$ – разбиение отр. от т. $c$ до т. $b$

При $d(\sigma)\to 0$ очевидно, что $d(\sigma_1)\to 0$, $d(\sigma_2)\to 0$.
переходя к пределу при $d(\sigma)\to 0$, имеем

$$\lim_{d(\sigma)\to 0}\sum_{[a;b]} f(\xi_k)\Delta x_k = \lim_{d(\sigma_1)\to 0}\sum_{[a;c]} f(\xi_k)\Delta x_k + \lim_{d(\sigma_2)\to 0}\sum_{[c;b]} f(\xi_k)\Delta x_k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \ \blacksquare$$

⑦ Если $f(x)$ интегр-ма на $[a;b]$ и $f(x)\geq 0$ на $[a;b]$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

Д-во: Составим интегр. сумму (по некоторому разбиению):

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$

Т.к. $f(\xi_k)\geq 0$, $\Delta x_k > 0$, то

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0.$$

Переходя к пределу при $d(\sigma)\to 0$, имеем

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0. \ \blacksquare$$

8 (Монотонность). Если $f(x)$, $g(x)$ инт-мы на $[a;b]$, а $f(x) \geq g(x)$ на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Д-во: $f(x)$, $g(x)$ инт-мы на $[a;b]$ $\Rightarrow$ $f(x)-g(x)$ тоже инт-ма на $[a;b]$ (по св-ву линейности). Кроме того, $f(x)-g(x) \geq 0$. Тогда по св-ву 7:

$$\int_a^b (f(x)-g(x)) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx. \blacksquare$$

9 (О сохранении $\int$-лом знака под. ф-и). Пусть $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$, $f(x) \geq 0$ на $[a;b]$, сущ-т т. $x_0 \in [a;b]$: $f(x_0) > 0$ и $f(x)$ непр. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx > 0.$$

Д-во: $f(x)$ непр. в т. $x_0$, $f(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ $\exists$ окр-ть т. $x_0$, в кот. $f(x) > 0$. Пусть отрезок $[\alpha;\beta]$ принадлежит этой окр-ти. По св-ву аддитивности:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^\alpha f(x)\,dx}_{\geq 0} + \underbrace{\int_\alpha^\beta f(x)\,dx}_{>0} + \underbrace{\int_\beta^b f(x)\,dx}_{\geq 0} > 0. \blacksquare$$

10 (Теорема об оценке) Пусть ф-и $f(x)$, $g(x)$ инт-мы на $[a;b]$; $m \leq f(x) \leq M$ на $[a;b]$, $g(x) \geq 0$ на $[a;b]$. Тогда

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx$$

Д-во: Умножая нер-во $m \leq f(x) \leq M$ на $g(x) \geq 0$, им.:

$$m\,g(x) \leq f(x)\,g(x) \leq M\,g(x)$$

по теор. 8 монотонности опр. инт-ла получим:

$$m\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq M\int_a^b g(x)\,dx. \blacksquare$$

Замечание. В частном случае, при $g(x) \equiv 1$ усл-е пред. теор. переформулируется след. обр.:

Пусть $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Тогда

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

(11) (оценка по модулю). Пусть $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$. Тогда $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$

Д-во: по св-ву 3) ф-я $|f(x)|$ интегрируема на $[a;b]$. При этом $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|$. По св-ву оценки интеграла

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx,$$

а это свойство эквив-но доказываемому. ∎

Замечание. Это св-во справедливо лишь при $a \le b$ (как и многие другие).

(12) (Теорема о среднем). Пусть $f(x)$ непр. на $[a;b]$. Тогда найдется т. $c \in [a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a).$$

Д-во: $f(x)$ непр. на $[a;b]$ $\Rightarrow$ по второй теор. Вейерштрасса эта ф-я достигает на отр. $[a;b]$ своих наибольших и наименьших значений. Пусть $m \le f(x) \le M$ на $[a;b]$. Тогда по теор. об оценке

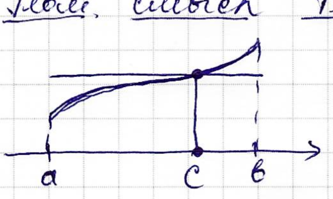
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a) \quad \Big| : (b-a)>0$$

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M$$

Обозначим $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \mu$. Тогда $\mu \in [m;M]$. По 2-ой теор. Больцано-Коши $\exists c \in [a;b]$ $f(c) = \mu$ $\Rightarrow$ т.е. $\exists c \in [a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a).$$ ∎

Геом. смысл теор. о среднем.




Площадь криволин. трапеции равна площади прямоугольника со сторонами $(b-a)$ и $f(c)$.

(13) (Неравенство Коши-Буняковского).

Пусть ф-и $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы с квадратом на отрезке $[a; b]$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \le \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\, dx}.$$

Д-во: На множестве прост-ве интегрируемых с квадратом на отрезке $[a; b]$ скалярное произведение можно ввести следующим образом:

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Записывая нер-во Коши-Буняковского для заданного скалярного произведения, получаем требуемое. ■