Лекция 5. Интеграл с переменным верхним пределом

§1. Интеграл с переменным верхним пределом.

Пусть ф-я $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$. Тогда она интегрируема на $\forall$ отрезке $[a;x]$ $\forall x \in [a;b]$. Значит, определена ф-я

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt \quad , x \in [a;b].$$

При этом

$$\Phi(a) = \int_a^a f(x)dx = 0; \ \Phi(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Опр. Функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ наз. интегралом с переменным верхним пределом.

Теор (о непр-ти инт-ла с переменным верхним пределом). Если $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$, то

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ непр. на $[a;b]$.

Д-во: Из инт-ти ф-и $f(x)$ на $[a;b]$ следует, что $f(x)$ огр. на $[a;b]$: $|f(x)| \leq M$, $x \in [a;b]$. Пусть $x_0 \in [a;b]$. Рассмотрим разность:

$$|\Phi(x_0+\Delta x) - \Phi(x_0)| = \left| \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right| =$$

$$= \left| \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt \right| = \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} |f(t)|dt \right| \leq \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} M \cdot dt = M \cdot |\Delta x|$$

Таким образом, при $\Delta x \to 0$ $\Delta\Phi \to 0$, т.е. $\Phi(x)$ непр. в т. x_0 $\Rightarrow \Phi(x)$ непр. на всём отрезке $[a;b]$, т.к. x_0 – произвольная точка. ■

Теор. (о производной интеграла с переменным верхним пределом). Если $f(x)$ непр. в т. $x_0 \in [a;b]$, $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$, то $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$

диф-ма в т. x_0, причем $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

Д-во: $f(x)$ непр. в т. x_0, значит, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0$ $\forall x$: $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Рассмотрим разность:

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0}\left(\int\limits_a^x f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt\right) - f(x_0) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{представим } f(x_0) \text{ в виде:} \\ f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int\limits_{x_0}^x f(x_0)\,dt \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\left(\int\limits_a^x f(t)dt - \int\limits_a^{x_0} f(t)dt - \int\limits_{x_0}^x f(x_0)\,dt\right) =$$

$$= \frac{1}{x - x_0}\int\limits_{x_0}^x \left(f(t) - f(x_0)\right)dt$$

Рассмотрим ~~разность~~ модуль разности:

$$\left|\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| = \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int\limits_{x_0}^x \left(f(t) - f(x_0)\right)dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int\limits_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,dt\right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \left|\int\limits_{x_0}^x \varepsilon\, dt\right| =$$

$$= \varepsilon \frac{1}{|x - x_0|} \cdot |x - x_0| \Rightarrow \lim_{x \to x_0}\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = f(x_0), \text{ т.е. } \Phi'(x_0) = f(x_0). \blacksquare$$

Замечание. Таким образом, интеграл с переменным верхним пределом явл. одной из первообразных ф-и $f(x)$, для непр. ф-и $f(x)$.

§2. Формула Ньютона-Лейбница

Теор. (формула Ньютона-Лейбница). Если $f(x)$ непр. на $[a;b]$, то

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – любая первообразная ф-и $f(x)$.

Д-во: Согласно предыдущей теор., $\Phi(x)$ – одна из первообразных ф-и $f(x)$. Тогда

$$F(x) = \Phi(x) + C, \text{ где } \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

При этом

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt + C \Rightarrow F(a) = C \Rightarrow$$

$$F(b) = \Phi(b) + C \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \blacksquare$$

Таким образом, для непр. на $[a;b]$ ф-и $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример. 1) $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}$.

2) $\int_0^{2\pi} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{2\pi} = 0$.

§3. Вычисление определённого интеграла

1) **Теор.** (о замене переменной в опр. интеграле).

Пусть 1) $f(x)$ непр. на $[a;b]$, $\varphi(t)$ непр.-диф. на $[\alpha;\beta]$,

2) значения ф-ии $x=\varphi(t)$ при $t\in[\alpha;\beta]$ не выходят за пределы отрезка $[a;b]$,

3) $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt$

Д-во: $f(x)$ непр. на $[a;b]$ $\Rightarrow \exists$ первообр. $F(x)$ ф-ии $f(x)$

$f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ непр. на $[\alpha;\beta]$ $\Rightarrow \exists$ первообр-е этой ф-ии, равная $F(\varphi(t))$, то по пр-лу диф-я сл. ф-ии:

$$\frac{dF(\varphi(t))}{dt} = F'(x)\Big|_{x=\varphi(t)}\cdot\varphi'(t) = f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

Таким образом, по ф-ле Ньютона-Лейбница:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b)-F(a) \Rightarrow \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt =$$

$$= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b)-F(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt. \blacksquare$$

Пример. 1) $$\int\limits_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left\{\begin{array}{c} \sqrt{x}=t \\ x=t^2 \\ dx=2t\,dt \\ x=0\to t=0 \\ x=9\to t=3 \end{array}\right\} = \int\limits_0^3 \frac{2t\,dt}{1+t} =$$

$$= 2\int\limits_0^3 \frac{t+1-1}{t+1}\,dt = 2\int\limits_0^3\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt = (2t-2\ln|t+1|)\Big|_0^3 =$$

$$= 6-2\ln 4.$$

2) $$\int\limits_{-2}^0 \sqrt[3]{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x=\sin t,\ dx=\cos t\,dt \\ x=-2\to t=\,? \end{array}\right\}$$

интеграл не может быть вычислен указанной заменой

② **Теор.** (об ∫-и по частям в опр. инт-ле)

Пусть ф-и $u(x)$, $v(x)$ непр. и дифф. на $[a;b]$. Тогда

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx$$

Д-во: Правило диф-я произведения:

$$(u(x)\,v(x))' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)$$

Все ф-и непр. на $[a;b]$ $\Rightarrow$ они инт-мы и

$$\int_a^b (u(x)\,v(x))'dx = \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx + \int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx$$

по ф-ле Ньютона-Лейбница: $\int_a^b (u(x)\,v(x))'dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$

Таким образом,

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Особенности применения этой ф-лы те же, что и для неопр. интегралов:

Пример. $\int_0^\pi x\cos x\,dx = \int_0^\pi x\,d\sin x = x\sin x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx =$

$= x\sin x\Big|_0^\pi + \cos x\Big|_0^\pi = -2.$

③ **Теор.** (об ∫-и чётных и нечётных ф-й на отрезке, симм. отн-но начала координат).

Если $f(x)$ чётная, то $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

Если $f(x)$ нечётная, то $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

Д-во: Если $f(x)$ – чётная, то $f(x)+f(-x) = f(x)+f(x) = 2f(x)$.

Если $f(x)$ – нечётная, то $f(x)+f(-x) = f(x)-f(x) = 0$.

Вычислим $\int_{-a}^a f(x)\,dx$:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx = \left\{\begin{array}{l} x=-t \\ -a\to a \\ 0\to 0 \\ dx=-dt \end{array}\right\} = -\int_a^0 f(-t)\,dt +$$

$$+\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a (f(x)+f(-x))\,dx.$$

Тогда, если $f(x)$ чётная, то

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a (f(x)+f(-x))\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Если $f(x)$ нечётная, то

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_0^a (f(x)+f(-x))\,dx = 0. \quad \blacksquare$$

Пример. 1) $\int\limits_{-2}^{2} (x+x^3+2x^5-\sin x)\,dx=0$

2) $\int\limits_{-2}^{2} (x^2+1)\,dx = 2\int\limits_{0}^{2}(x^2+1)\,dx = 2\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_0^2 = \frac{20}{3}.$

④ Теор. (об интегрировании период. функций).
Пусть $f(x)$ — период. ф-я с периодом T, т.е. $f(x+T)=f(x)$ $\forall x$ из обл. опр. Тогда

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)\,dx.$$

Д-во: Рассмотрим этот интеграл:

$$\int\limits_a^{a+T} f(x)dx = \int\limits_a^0 f(x)dx + \int\limits_0^T f(x)dx + \int\limits_T^{a+T} f(x)dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} x=t+T,\ dx=dt \\ x=T \Rightarrow t=0 \\ x=a+T \Rightarrow t=a \end{array}\right\} = \int\limits_a^0 f(x)dx + \int\limits_0^T f(x)dx + \int\limits_0^a f(t+T)dt =$$

$$= -\int\limits_0^a f(x)\,dx + \int\limits_0^T f(x)\,dx + \int\limits_0^a f(t)dt = \int\limits_0^T f(x)\,dx.$$

Таким образом, $\int\limits_a^{a+T} f(x)\,dx = \int\limits_0^T f(x)dx$,

т.е. интеграл от периодической ф-и на отрезке длины T можно вычислять на любом отрезке такой длины.

Пример. 1) $\int\limits_{-\pi/2}^{3\pi/2} \cos x\,dx = \int\limits_0^{2\pi} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{2\pi} = 0.$

2) $\int\limits_{\pi/4}^{9\pi/4} \sin x\,dx = \int\limits_0^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_0^{2\pi} = 0.$