Лекция 6. Несобственные интегралы I рода

§1. Несобств. интегралы по бесконечному промежутку (I рода)

① Пусть $f(x)$ опр-на на $[a;+\infty)$ и интегрируема на $\forall$ отр. $[a;b] \subset [a;+\infty)$. Тогда на пром-ке $[a;+\infty)$ опр-на ф-я

$$F(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

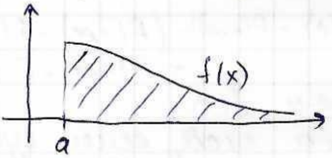
Опр. Если $\exists$ предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(b),$$

то этот предел наз. несобственным интегралом I рода по беск. пром-ку $[a;+\infty)$.

Обозн.: $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)\,dx$

Опр. Если этот предел конечен, то несобств. интеграл наз. сходящимся, иначе — расходящ.



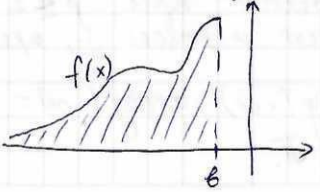
Геом-ки несобств. интеграл I рода представляет собой площадь ∞ криволин. трап.

② Пусть $f(x)$ опр-на при $x \le b$ и интегр-на на $\forall$ отр. $[a;b] \subset (-\infty; b]$

Опр. Предел

$$\lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx$$

наз. несобственным интегралом I рода по бесконечному пром-ку $(-\infty; b]$.



Геом-ки этот несобств. $\int$-л I рода представляет собой площадь бесконечной криволин. трапеции.

③ Если $f(x)$ определена на всей числовой прямой и интегр-ма на $\forall$ отр. $[a;b]$, можно выбрать произв. т. c и рассмотреть сумму:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{c} f(x)\,dx + \lim_{b\to+\infty}\int_{c}^{b} f(x)\,dx.$$

<u>Опр.</u> Эта сумма наз. <u>несобственным</u> <u>интегралом</u> I рода ф-и $f(x)$ по ∞ пром-ку $(-\infty;+\infty)$

Сходимость этого интеграла эквивалентна сход-ти каждого интеграла в сумме и не зависит от выбора т. c.

④ Для несобств. интегралов I рода справедливо обобщение формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty} F(x)\Big|_{a}^{b} = \lim_{b\to+\infty}(F(b)) - F(a) = F(+\infty) - F(a)$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{a\to-\infty} F(x)\Big|_{a}^{b} = F(b) - \lim_{a\to-\infty} F(a) = F(b) - F(-\infty).$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = \big(F(c) - F(-\infty)\big) - \big(F(+\infty) - F(c)\big) = F(+\infty) - F(-\infty),$$

где $F(x)$ — первообразная ф-и $f(x)$.
Т.о., несобств. интеграл I рода сход, если сущ-ет соотв. предел первообразной ($F(+\infty)$, $F(-\infty)$ или оба).

⑤ <u>Примеры</u>. 1) Интеграл Дирихле $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$

а) $p=1$: $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{1}^{+\infty} = +\infty$ - интеграл расх.

б) $p\neq 1$: $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big|_{1}^{+\infty}$ → $p>1$: $\frac{1}{p-1}$ - интеграл сх.
→ $p<1$: ∞ - интеграл расх.

Т.о., интеграл $\int_{1}^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$ $\begin{cases}\text{расходится при } p\leq 1\\ \text{сходится и равен } \frac{1}{p-1} \text{ при } p>1.\end{cases}$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \operatorname{arctg}(+\infty) - \operatorname{arctg}(-\infty) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$

§2. Свойства несобств. интегралов I рода

① Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то $\int_{+\infty}^{a} f(x)dx = -\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

② (Линейность). Если интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся, то интеграл $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$ также сходится, причем $\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)dx$.

③ (Теор. об оценке). Если интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся, $f(x) \leq g(x)$, то

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$$

④ Если $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится, то $\forall c > a$ интеграл $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ также сходится. При этом

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \int_a^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Следствие. Если $f(x)$ опр-на на $[a; +\infty)$, интегрируема на $\forall$ отр. $[a; c] \subset [a; +\infty)$, то $\forall c > a$ интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$

либо сходятся, либо расходятся одновременно.

Замечание. Из св-ва 2) при $\beta = 0$:

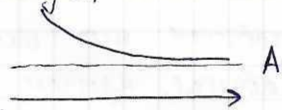
$$\int_a^{+\infty} \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\,dx,$$

т.е. умножение на ненулевую константу не влияет на сходимость.

При вычислении несобств. интегралов остаются справедливыми формулы замены переменной и интегр-я по частям.

§3. Признаки сходимости несобственных интегралов I рода

Рассмотрим $\int\limits^{+\infty} f(x)\,dx$, где $f(x) \geq 0$ на $[a;+\infty)$.
Из геом. интерпретации следует, что если
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A > 0$,



то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расх.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, то интеграл может и сходиться, и расходиться.
Напр., $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x}$ - расходится, $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2}$ – сходится.

① Теор. (признак сравнения по нер-ву). Пусть ф-и $f(x)$, $g(x)$ определены на $[a;+\infty)$, интегрируемы на $\forall$ отр. $[a;b] \subset [a;+\infty)$, $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0$ на $[a;+\infty)$ и $f(x) \leq g(x)$ на $[a;+\infty)$. Тогда
1) если $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то и $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сход.
2) если $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, то и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расход.

Д-во: 1) Функция
$$\Phi(b) = \int\limits_a^b f(x)\,dx$$
монотонно возрастает. В самом деле, для $b_1 < b_2$
$$\Phi(b_2) = \int\limits_a^{b_2} f(x)\,dx = \int\limits_a^{b_1} f(x)\,dx + \underbrace{\int\limits_{b_1}^{b_2} f(x)\,dx}_{\geq 0} \geq \int\limits_a^{b_1} f(x)\,dx = \Phi(b_1).$$
Это же верно и для $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Пусть интеграл $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится. Тогда $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx = A$.
Т.к. $\Phi(b) = \int\limits_a^b g(x)\,dx$ монотонно возрастает, то
$\int\limits_a^b g(x)\,dx \leq A \quad \forall b$.
Т.к. $f(x) \leq g(x)$ на $[a;+\infty)$, то $\int\limits_a^b f(x)$ монотонно возр. и ограниченная $\Rightarrow \exists$ конечный предел
$\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx \Rightarrow$ интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.

От противного.

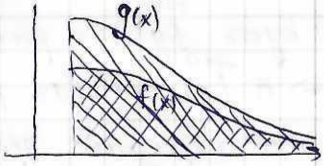
2) Пусть $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расходится, а $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится.

Тогда по утв. 1) $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ тоже сходится.

Это противоречие д-ет 2). ■

<u>Замечание</u>. Утверждение теоремы не изменится, если нер-во $f(x) \le g(x)$ вып. не на $[a;+\infty)$, а лишь при $a_0 > a$, что следует из аддитивности несобств. интегралов.

Геом. интерпретация теор:



<u>Пример</u>. Исследуем на сходимость интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[5]{x^7+x^4+1}}$

Т.к. $x^7+x^4+1 \ge x^7$ на $[1;+\infty)$, то

$\sqrt[5]{x^7+x^4+1} \ge \sqrt[5]{x^7} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[5]{x^7+x^4+1}} \le \frac{1}{x^{7/5}}$

$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{7/5}}$ сходится (интеграл Дирихле с $p = \frac{7}{5} > 1$)

$\Rightarrow$ исходный $\int$-л тоже сходится по признаку срав-я.

② <u>Теор</u> (<u>предельный признак сравнения</u>). Пусть

1) $f(x) \ge 0$, $g(x) \ge 0$ опр-ны на $[a;+\infty)$, инт-мы на $\forall$ отр. $[a;b]$, $b > a$.

2) $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$ (конечный).

Тогда интегралы $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходятся либо расходятся одновременно.

<u>Док-во</u>: $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists M > 0:$

$\forall x > M \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - \lambda\right| < \varepsilon$ или $\left|\frac{f(x) - \lambda g(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon$.

Таким образом, $\forall x > M$

$-\varepsilon g(x) < f(x) - \lambda g(x) < \varepsilon g(x) \quad | + \lambda g(x)$

$(\lambda - \varepsilon) g(x) < f(x) < (\lambda + \varepsilon) g(x)$.

Т.к. $\lambda > 0$, ε всегда можно выбрать так, что $\lambda - \varepsilon > 0$.

Осталось д-ть 4 утверждения, применив теор. о признаке сходимости по нер-ву.

1) Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сход $\Rightarrow \int_M^{+\infty} g(x)\,dx$ сход. (по аддитивности) $\Rightarrow \int_M^{+\infty} (\lambda+\varepsilon) g(x)\,dx$ сход. (линейность) $\Rightarrow \int_M^{+\infty} f(x)\,dx$ сход. (признак срав-е) $\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сход (лин.)

2) Пусть $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расход $\Rightarrow \int_M^{+\infty} g(x)\,dx$ расх. (аддит.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \int_M^{+\infty} (\lambda-\varepsilon) g(x)\,dx$ расх. (линейность) $\Rightarrow \int_M^{+\infty} f(x)\,dx$ расх. (признак срав-е) $\Rightarrow \int^{+\infty} f(x)\,dx$ расх. (лин.)

3) Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сход. $\Rightarrow \int_M^{+\infty} f(x)\,dx$ сход. (аддит.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \int_M^{+\infty} (\lambda-\varepsilon) g(x)\,dx$ сход. (признак срав-е) $\Rightarrow \int_M^{+\infty} g(x)\,dx$ сход. (линейность) $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сход. (аддит.)

4) Пусть $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ расх $\Rightarrow \int_M^{+\infty} f(x)\,dx$ расх. (аддит.) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \int_M^{+\infty} (\lambda+\varepsilon) g(x)\,dx$ расх. (признак срав-е) $\Rightarrow \int_M^{+\infty} g(x)\,dx$ расход. (линейность) $\Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ расх. (аддит.) ∎

<u>Примеры</u>. Исследуем сходимость интегралов

1) $\int_1^{+\infty} \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{x^3+x^2+2}}$

$$\frac{(x+1)}{\sqrt{x^3+x^2+2}} = \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{3/2}\sqrt{1+1/x+2/x^3}} \sim \frac{1}{x^{1/2}} \text{ при } x \to +\infty$$

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{1/2}}$ расх. (интеграл Дирихле с $p = \frac{1}{2} < 1$) $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ исходный интеграл тоже расх. по предельному признаку сравнения

2) $\int_2^{+\infty} \sin\frac{1}{x^2}\,dx$

$\sin\frac{1}{x^2} \sim \frac{1}{x^2}$ при $x \to +\infty$, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сход $\Rightarrow$ исходный интеграл тоже сходится по пред. признаку сравнения.