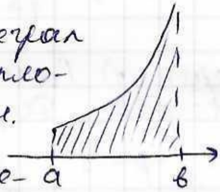
Лекция 7. Несобственные интегралы II рода. Условная и абсолютная сходимость

§1. Несобственные интегралы от неограниченных функций (II рода).

① Пусть $f(x)$ определена при $x \in [a;b)$ и не ограничена при $x \to b-$. Пусть $f(x)$ инт-ма на $\forall$ отр. $[a;\eta]$, $a < \eta < b$.

Опр. Предел
$$\lim_{\eta \to b-} \int_a^{\eta} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$
наз. несобств. интегралом II рода на отр. $[a;b]$

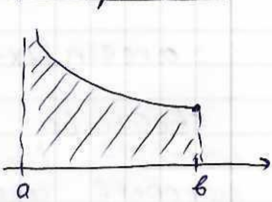
Геометрически несобств. интеграл II рода представляет собой площадь ∞ криволин. трапеции.



Опр. Если этот предел $\exists$ и конечен, он наз. сходящимся, иначе — расходящимся.

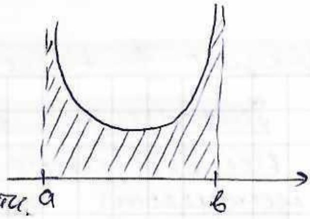
② Если $f(x)$ опр-на при $x \in (a;b]$, не огр. при $x \to a+$, инт-ма на $\forall$ отр. $[\xi;b]$, $a<\xi<b$, то можно определить предел
$$\lim_{\xi \to a+} \int_{\xi}^{b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$
Опр. Этот предел наз. несобств. интегралом от неогр. функции (II рода).

Аналогично, геом-ки такой интеграл представляет собой площадь ∞ ~~кривол~~ криволин. трапеции.



③ Если $f(x)$ опр-на на $(a;b)$, не огр. при $x \to a+$ и при $x \to b-$ и инт-ма на $\forall [\xi;\eta]$, $a<\xi<\eta<b$, то можно рассмотреть интеграл
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \lim_{\xi \to a+} \int_{\xi}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\eta \to b-} \int_c^{\eta} f(x)dx.$$

Этот интеграл $\exists$-ет, если $\exists$-ют оба предела в правой части, а сходится, если сходятся оба интеграла в правой части.



(4) Для несобственных интегралов II рода справедливо обобщение формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b-) - F(a+),$$

где $F(x)$ — первообразная ф-и $f(x)$,

$$F(b-) = \lim_{\eta \to b-} F(\eta)\,; \quad F(a+) = \lim_{\xi \to a+} F(\xi).$$

(5) <u>Примеры</u>. 1) Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$.
(интеграл Дирихле II рода)

а) при $p = 1$: $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_0^1 = \infty$ (интеграл расх.)

б) при $p \neq 1$: $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \frac{x^{-p+1}}{-p+1} \begin{cases} \to \frac{1}{1-p} & \text{при } p<1 \\ \to \infty & \text{при } p>1. \end{cases}$

Таким образом, интеграл

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^p} \begin{cases} \text{сходится и равен } \frac{1}{1-p} & \text{при } p<1 \\ \text{расходится} & \text{при } p>1, \end{cases}$$

2) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{-(x^2-x+\frac{1}{4})+\frac{1}{4}}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{4}-(x-\frac{1}{2})^2}} =$$

$$= \arcsin(2x-1)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

Свойства и правила вычисления несобств. $\int$-лов II рода те же, что и у несобств. интегралов I рода.

§2. Признаки сходимости несобственных интегралов II рода

① Теор. (признак сравнения по неравенству).
1) пусть $f(x)$, $g(x)$ опр-ны на $[a;b)$, инт-мы на $\forall$ отр. $[a;\eta] \subset [a;b)$, не огр. при $x \to b-$,
2) $f(x), g(x) \geq 0$ на $[a;b)$, $f(x) \leq g(x)$ на $[a;b)$. Тогда:
1) Если $\int_a^b g(x)\,dx$ сходится, то сх. и $\int_a^b f(x)\,dx$
2) Если $\int_a^b f(x)\,dx$ расходится, то расх. и $\int_a^b g(x)\,dx$. □

② Теор. (предельный признак сравнения).
1) пусть $f(x)$, $g(x)$ опр-ны на $[a;b)$, инт-мы на $\forall$ отр. $[a;\eta] \subset [a;b)$, не огр. при $x \to b-$,
2) $f(x) \geq 0$, $g(x) \geq 0$, $\exists \lim\limits_{x \to b-} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda > 0$ (конечно).
Тогда интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$ либо оба сходятся, либо оба расходятся. □.

В кач-ве ф-ий сравнения удобно использовать $1/x^p$ (интеграл Дирихле II рода).

③ Примеры. 1) Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$

Ф-я $f(x) = \frac{1}{e^x - \cos x}$ не огр. при $x \to 0+$,

$$e^x - \cos x = \underbrace{(e^x - 1)}_{\sim x} + \underbrace{(1 - \cos x)}_{\sim x^2/2} \sim x \text{ при } x \to 0+$$

$\int_0^1 \frac{dx}{x}$ расх. (интеграл Дирихле II рода с $p = 1$)

$\Rightarrow$ исх. интеграл тоже расх. по пред. признаку срав-я.

2) Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + x\sin x}$

Ф-я $\frac{1}{\sqrt{x} + x\sin x}$ не огр. при $x \to 0+$,

$$\sqrt{x} + x\sin x = \sqrt{x}\,(1 + \sqrt{x}\sin x) \sim \sqrt{x}$$

$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится (интеграл Дирихле II рода с $p = \frac{1}{2} < 1$)

$\Rightarrow$ исх. $\int$-л тоже сходится по предельному признаку сравнения

§4. Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов

Пусть $f(x)$ опр-на при $x \geq a$ и инт-ма на $\forall$ отрезке $[a; b] \subset [a; +\infty)$. Тогда это же верно и для ф-ии $|f(x)|$. Поэтому можно рассмотреть 2 несобственных интеграла:

$$I_1 = \int_a^{+\infty} f(x)\,dx, \quad I_2 = \int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$$

Опр. Если интеграл I_2 сходится, то про I_1 говорят, что он сходится абсолютно. Если интеграл I_1 сходится, но I_2 расх., то про I_1 говорят, что он сходится условно.

Теор. (об абсолютной сходимости $\int$-ла). Пусть $f(x)$ опр-на на $[a; +\infty)$ и интегрируема на $[a; b] \subset [a; +\infty)$. Если интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, то и $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится.
Иначе говоря, если интеграл сходится абсолютно, то он сходится.

Д-во: Воспользуемся неравенством

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|, \quad x \in [a; +\infty)$$

откуда $0 \leq f(x) + |f(x)| \leq 2|f(x)|$.

Интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится $\Rightarrow \int_a^{+\infty} 2|f(x)|\,dx$ сходится (линейность) $\Rightarrow \int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\,dx$ сходится (признак сравнения по нер-ву).

Очевидно, что $f(x) = f(x) + |f(x)| - |f(x)| \Rightarrow$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^{+\infty} (f(x) + |f(x)|)\,dx}_{\text{сход.}} - \underbrace{\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx}_{\text{сход.}} \text{ — сход.} \blacksquare$$

Таким образом, для интегралов от знакопеременных ф-й возможно 3 случая:

1) расходится,
2) сходится абсолютно,
3) сходится условно

Примеры.

1) Рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x^3+1}} dx$

Подынтегральная ф-я знакопеременная. Рассмотрим интеграл от модуля:

$$\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{\sqrt{x^3+1}} dx$$

$$|\cos x| \leq 1 \Rightarrow \frac{|\cos x|}{\sqrt{x^3+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

Интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$ сходится (интеграл Дирихле I рода с $p = \frac{3}{2} > 1$) $\Rightarrow$ исходный интеграл сходится абсолютно.

2) Рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

Доказать, что интеграл сходится абсолютно, не получается. Однако интеграл сходится, что можно д-ть интегрированием по частям:

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = -\int_1^{+\infty} \frac{d\cos x}{x} = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx =$$

$$= \cos 1 - \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx}_{\text{сход.}} \text{ - сходится.}$$

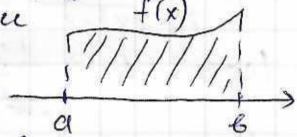
Геом. приложения опред. интегралов

§3. Вычисление площадей плоских фигур.

① Пусть $f(x)$ интегрируема на $[a;b]$, $f(x) \geq 0$.

Площадь криволин. трапеции, ограниченной графиком ф-и $f(x)$, осью Ox и вертик. прямыми $x = a$, $x = b$, вычисл. по ф-ле:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$



Д-во: Интегр. сумма ф-и $f(x)$:

$$S(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$$ по некот. разб-ю σ

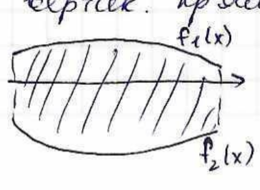
При $d(\sigma) \to 0$ значение интегр. суммы стремится к опр. инт-лу, а геом. смысл этой суммы (сумма площадей прямоугольников) "стремится" к площади рассмотр. криволин. трапеции, откуда

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \blacksquare$$

② Если $f(x)$ инт-ма на $[a;b]$, $f(x) \leq 0$ на $[a;b]$, то площадь криволин. трапеции, огр. графиком ф-и $f(x)$, осью Ox и вертик. прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле:

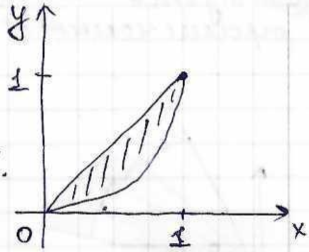
$$S = -\int_a^b f(x)\,dx$$

③ Если фигура огр. графиками ф-й $f_1(x)$, $f_2(x)$, причем $f_1(x) \geq f_2(x)$ при $\forall x \in [a;b]$, и вертик. прямыми $x = a$, $x = b$, то её площадь вычисляется по формуле



$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,dx$$

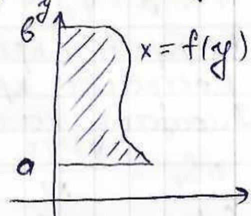
Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками $y = x$, $y = x^2$



Точки пересечения: $a=0$ и $b=1$.

$$S = \int_0^1 (x - x^2)\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{6}.$$

④ Если функция м.б. представлена в виде интегрируемой ф-ии $x = f(y)$, то площадь криволин. трапеции, огр. кривой $x = f(y) \geq 0$, осью Oy, и горизонт. прямыми $y=a$, $y=b$, м.б. вычислена по формуле:

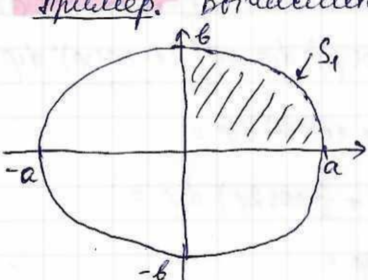


$$S = \int_a^b f(y)\,dy$$

⑤ Пусть ф-я $y = f(x)$, задающая верхнюю границу криволин. трапеции, задана параметрически ур-ями $x = x(t)$, $y = y(t)$, причем $x = a$ при $t = \alpha$, $x = b$ при $t = \beta$.
Тогда в интеграле нужно сделать замену переменной:

$$S = \int_a^b y\,dx = \left| \begin{array}{l} x = x(t),\ y = y(t) \\ dx = x'(t)\,dt \\ x = a \to t = \alpha \\ x = b \to t = \beta \end{array} \right| = \boxed{\int_\alpha^\beta y(t)\,x'(t)\,dt}$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$



В силу симметрии

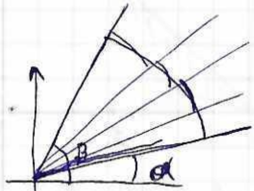
$$S = 4S_1 = 4\int_0 y\,dx =$$

$$= 4\int_{\pi/2}^{0} b\sin t\cdot(-a\sin t)\,dt =$$

$$= 4ab\int_0^{\pi/2} \sin^2 t\,dt = 2ab\int_0^{\pi/2}(1-\cos 2t)\,dt =$$

$$= 2ab\Big(\underbrace{t\Big|_0^{\pi/2}}_{=\pi/2} - \underbrace{\frac{1}{2}\sin 2t\Big|_0^{\pi/2}}_{=0}\Big) = \pi ab.$$

5 Пусть D — криволинейный сектор, ограниченный лучами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$ и кривой $r=r(\varphi)$, $\varphi\in[\alpha;\beta]$, заданной в полярных координатах, причем $r(\varphi)$ непр. на $[\alpha;\beta]$.



Вычислим площадь S_D этого сектора.

Пусть задано разбиение отрезка $[\alpha;\beta]$:

$$T:\ \alpha=\varphi_0<\varphi_1<\ldots<\varphi_n=\beta.$$

Выберем произвольные точки $\xi_k\in[\varphi_{k-1};\varphi_k]$, $k=\overline{1,n}$.
Построим круговые секторы радиусами $r(\xi_k)$.
Площадь каждого такого сектора равна

$$\Delta S_k=\frac{\pi r^2(\xi_k)}{2\pi}\Delta\varphi_k=\frac{1}{2}r^2(\xi_k)\Delta\varphi_k,\ \text{где } \Delta\varphi_k=\varphi_k-\varphi_{k-1}$$

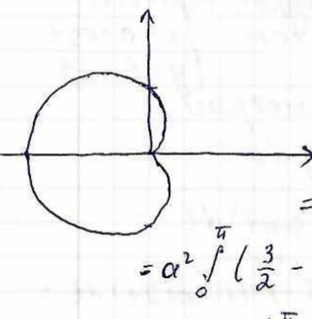
Совокупность всех секторов составляет фигуру площадью

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta S_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}r^2(\xi_k)\Delta\varphi_k$$

Получим интегр. сумму ф-и $\frac{1}{2}r^2(\varphi)$ на отр. $[\alpha;\beta]$. При $d(T)\to0$ получим площадь криволинейного сектора D. Таким образом,

$$\boxed{S_D=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}r^2(\varphi)\,d\varphi}$$

Пример. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r=a(1-\cos\varphi)$



$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos\varphi)^2d\varphi=a^2\int_0^{\pi}(1-\cos\varphi)^2d\varphi=$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\,d\varphi=$$

$$=a^2\int_0^{\pi}\left(1-2\cos\varphi+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=a^2\int_0^{\pi}\left(\frac{3}{2}-2\cos\varphi+\frac{1}{2}\cos2\varphi\right)d\varphi=$$

$$=a^2\Big(\underbrace{\frac{3}{2}\varphi\Big|_0^{\pi}}_{=\frac{3}{2}\pi}-\underbrace{2\sin\varphi\Big|_0^{\pi}}_{=0}+\underbrace{\frac{1}{4}\sin2\varphi\Big|_0^{\pi}}_{=0}\Big)=\frac{3\pi a^2}{2}.$$