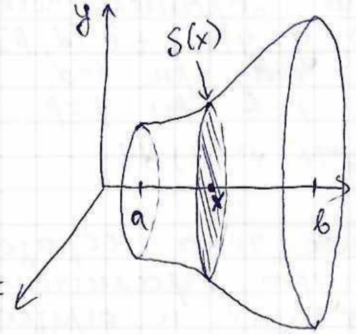
Лекция 8. Геометрические приложения определённого интеграла

§1. Вычисление объемов тел

① Пусть тело заключено между плоскостями $x=a$, $x=b$. Пусть площадь поперечного сечения тела плоскостями, перпендикулярными оси Ox, явл. непрерывной ф-ей от координаты x $S(x)$.



Пусть

$\sigma: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ –

разбиение отр. $[a;b]$.

Выберем точки $\xi_k \in [x_{k-1}; x_k]$, $k=\overline{1,n}$. Построим между плоскостями $x=x_{k-1}$ и $x=x_k$ прямые цилиндры площадью поперечного сечения $S(\xi_k)$. Объем такого цилиндра:

$$\Delta V_k = S(\xi_k)\Delta x_k\ ;\ \Delta x_k = x_k - x_{k-1},\ k=\overline{1,n}$$

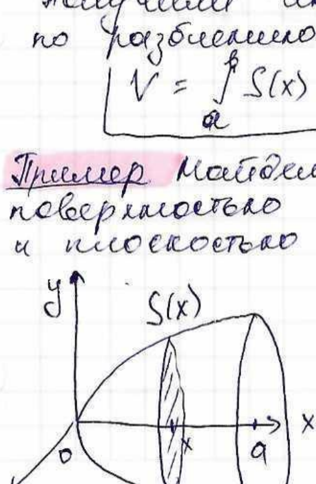
Совокупность всех цилиндров имеет объем:

$$\sum_{k=1}^{n}\Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} S(\xi_k)\Delta x_k$$

Получили интегральную сумму ф-и $S(x)$ по разбиению σ. При $d(\sigma)\to 0$:

$$\boxed{V = \int_a^b S(x)\,dx}.$$

Пример. Найдем объем тела, ограниченного поверхностью $x=y^2+z^2$ (эллипт. параболоид) и плоскостью $x=a$ $(a>0)$.

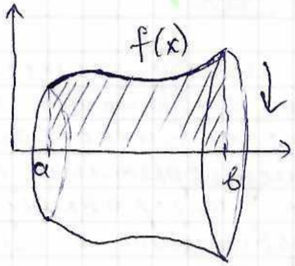


Сечение плоскостью, ⊥-ной оси Ox, есть окружность $y^2+z^2=x$ радиуса $\sqrt{x}$ $\Rightarrow$ $S(x)=\pi x$.

$$V = \int_0^a \pi x\,dx = \pi\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{\pi a^2}{2}.$$

② Пусть криволинейная трапеция, ограниченная функцией $f(x)$, вращается вокруг оси Ox. Тогда $S(x) = \pi f^2(x)$, а значит,

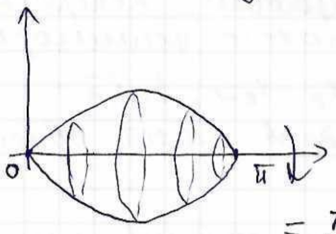
$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx}$$



Если же функция $f(x)$ задана параметрически: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, причем $x = a$ при $t = \alpha$, $x = b$ при $t = \beta$

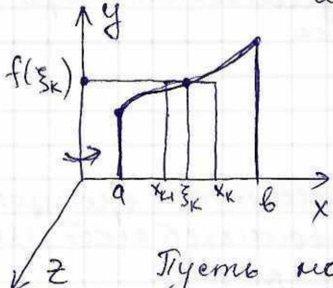
Тогда $$V = \pi \int_a^b y^2\,dx = \pi \int_\alpha^\beta y^2(t)\,x'(t)\,dt.$$

Пример. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной графиком функции $y = \sin x$ и отрезком $0 \le x \le \pi$ вокруг оси Ox:



$$V = \pi \int_0^\pi \sin^2 x\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{2} \int_0^\pi (1 - \cos 2x)\,dx =$$
$$= \frac{\pi}{2} \cdot \Big(x - \underbrace{\tfrac{1}{2}\cos 2x}_{=0}\Big)\Big|_0^\pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

③ Пусть криволинейная трапеция, ограниченная функцией $f(x)$, осью Ox, прямая $x=a$, $x=b$, вращается вокруг оси Oy, $a \geq 0$, $f(x) \geq 0$ непр. на $[a;b]$



Пусть

$\sigma: a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ — разбиение отр. $[a;b]$.

Пусть на отр. $[x_{k-1}; x_k]$ выбр. точки ξ_k.
Рассмотрим прямоугольник со сторонами $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ и $f(\xi_k)$. Объем тела, получающегося при вращении вокруг оси Oy этого прямоугольника, равен

$$\Delta V_k = \pi x_k^2 f(\xi_k) - \pi x_{k-1}^2 f(\xi_k) = \pi f(\xi_k) \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\Delta x_k} (x_k + x_{k-1}) =$$

$$= 2\pi f(\xi_k) \frac{x_k + x_{k-1}}{2} \cdot \Delta x_k$$

$\frac{x_k + x_{k-1}}{2} \in [x_{k-1}; x_k]$; $f(x)$ непр. на $[a;b]$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ можно положить $\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta V_k = 2\pi f(\xi_k)\, \xi_k\, \Delta x_k$$

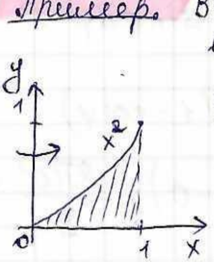
Совокупность построенных цилиндров имеет объем

$$V = \sum_{k=1}^{n} \Delta V_k = \sum_{k=1}^{n} 2\pi \xi_k f(\xi_k) \Delta x_k$$

Получили интегральную сумму ф-и $2\pi x f(x)$ на $[a;b]$. При $d(\sigma) \to 0$ получим:

$$\boxed{V = \int_a^b 2\pi x f(x)\, dx = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.}$$

Пример. Вычислить объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной $y = x^2$, осью Ox, прямой $x = 1$.



$$V = 2\pi \int_0^1 x \cdot x^2\, dx = 2\pi \cdot \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

④ Пусть криволинейная трапеция ограничена функцией, заданной параметрически уравнениями

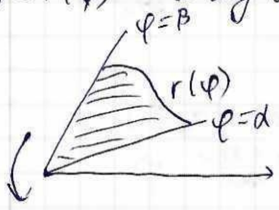
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [\alpha; \beta],$$

причем $x = a$ при $t = \alpha$,
$x = b$ при $t = \beta$.

Тогда объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy этой криволинейной трапеции, равен

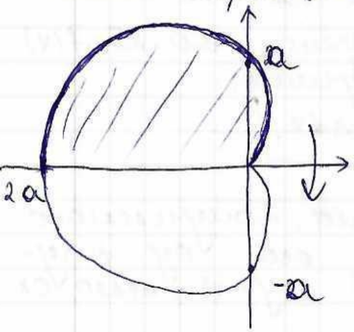
$$V_y = 2\pi \int_a^b x(t)y(t)\,dx = \boxed{2\pi \int_\alpha^\beta x(t)y(t)x'(t)\,dt}$$

⑤ Пусть криволинейный сектор, ограниченный кривой, заданной в ПСК уравнением $r = r(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, вращается вокруг полярной оси. Тогда объем тела вращения равен



$$V = \frac{2\pi}{3} \int_\alpha^\beta r^3(\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$

Пример. Кардиоида $r = a(1 - \cos\varphi)$ вращается вокруг полярной оси. Найти объем тела вращения.



Пределы интегр-я: от 0 до π, т.к. вращаем только верхнюю часть кардиоиды.

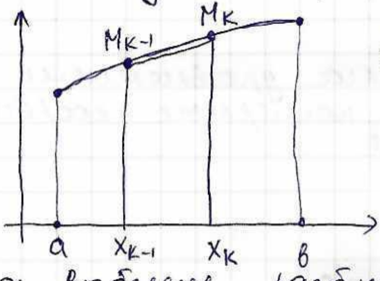
$$V = \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi a^3(1-\cos\varphi)^3 \sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \int_0^\pi a^3(1-\cos\varphi)^3\,d(1-\cos\varphi) =$$

$$= \frac{2\pi}{3} \cdot a^3 \cdot \frac{(1-\cos\varphi)^4}{4}\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{6} \cdot a^3 (2^4 - 0) = \frac{8\pi a^3}{3}.$$

§2. Длина дуги плоской кривой

① Пусть $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [\alpha;\beta]$ –
плоская кривая, заданная параметрически,
ф-и $x(t)$, $y(t)$ непр. и диф-мы, причем



$x = a$ при $t = \alpha$,
$y = b$ при $t = \beta$

Тогда длина кривой, соединяющей точки $A(x(\alpha); y(\alpha))$, $B(x(\beta), y(\beta))$, равна

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\, dt$$

Д-во: Выберем разбиение отр. $[\alpha;\beta]$:

$$\sigma = \alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta.$$

Пусть M_k – точка с координатами $(x(t_k), y(t_k))$.
Длина ломаной M_0M_n равна

$$L(M_0M_n) = \sum_{k=1}^{n} M_{k-1}M_k = \sum_k \Delta L_k$$

найдем длину одного отрезка ломаной. по формуле расстояния м/у двумя точками:

$$\Delta L_k = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

Ф-и $x(t)$, $y(t)$ непр. и диф-мы на каждом из отрезков разбиения $\Rightarrow$ они удовл. теор. Лагранжа:

$$x_k - x_{k-1} = x'(\xi_k)(t_k - t_{k-1}),\ \xi_k \in [t_{k-1}; t_k]$$

$$y_k - y_{k-1} = y'(\xi_k')(t_k - t_{k-1}),\ \xi_k' \in [t_{k-1}; t_k].$$

Т.о, длина ломаной M_0M_n равна

$$L(M_0M_n) = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_k))^2(t_k - t_{k-1})^2 + (y'(\xi_k'))^2(t_k - t_{k-1})^2} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x'(\xi_k))^2 + (y'(\xi_k'))^2} \cdot |t_k - t_{k-1}|$$

При $d(\sigma) \to 0$ точки $\xi_k' \to \xi_k$, поэтому получим интегральную сумму ф-и $\sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ $\Rightarrow$ требуемое. ■

② В частном случае декартовых координат длина кривой AB с коор-тами концов $A(a; f(a))$, $B(b, f(b))$ для непр. и дифф-мой ф-и $f(x)$ на отр. $[a; b]$ вычисляется по формуле:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

③ Если кривая задана уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, в полярных координатах, то полагая

$$x = r(\varphi)\cos\varphi$$
$$y = r(\varphi)\sin\varphi,$$

получим

$$x' = r'(\varphi)\cos\varphi - r(\varphi)\sin\varphi$$
$$y' = r'(\varphi)\sin\varphi + r(\varphi)\cos\varphi$$

$$\Rightarrow (x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 = (r'(\varphi))^2\cos^2\varphi -$$
$$-2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + (r(\varphi))^2\sin^2\varphi + (r'(\varphi))^2\sin^2\varphi$$
$$+2r'(\varphi)r(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi + (r(\varphi))^2\cos^2\varphi = (r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2.$$

Значит, длина сектора такой кривой равна

$$\boxed{L = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2}\, d\varphi}$$

§3. Площадь поверхности вращения

Общая формула для вычисления площади поверхности тела вращения:

$$Q_x = 2\pi \int^{l_{AB}} Y(l)\,dl,$$ где

$Y(l)$ – расст-е от точки кривой до оси вращ-я,
dl – дифференциал длины дуги
l_{AB} – длина дуги AB.

① Если кривая задана пар-ки уравнениями
$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $t \in [\alpha;\beta]$, то площадь поверхности вращения вокруг оси Ox равна

$$Q_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt$$

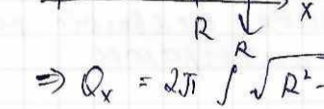
② Если кривая — график ф-и $y = f(x)$ в ДСК, $x \in [a;b]$, то площадь поверхности вращения вокруг Ox:

$$Q_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

③ Если кривая задана в ПСК уравнением $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha;\beta]$, то площадь поверхности вращения вокруг полярной оси:

$$Q_x = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} r(\varphi)\sin\varphi\sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

Пример Вычислить площадь поверхности, полученной вращением дуги окр-ти $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $x \in [0; R]$, вокруг оси Ox.



$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2};\quad f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

$$1 + (f'(x))^2 = \frac{R^2 - x^2}{R^2 - x^2} + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}$$

$$\Rightarrow Q_x = 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \cdot \frac{R\,dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\pi R \int_0^R dx = 2\pi R^2.$$