Лекция 9. Дифференциальные уравнения первого порядка

§1. Понятие дифференциального уравнения (ДУ)

Опр Дифференциальным наз. уравнение, в кот. неизвестными явл. функции одной или нескольких переменных, а в уравнение входят сами ф-и и их производные до некоторого конечного порядка. ДУ наз. обыкновенным, если неизвестная явл. ф-я одной переменной, т.е. ур-е имеет вид
$$F(x, y, y', .., y^{(n)}) = 0.$$
ДУ наз. дифф. уравнением в частных производных (ДУЧП), если неизвестная явл. ф-я нескольких переменных.

Опр. Максим. порядок входящей в ур-е производной наз. порядком ДУ.

Пример. $y' = e^x$ - ДУ I пор.

Опр Решением ДУ наз. диф-я ф-я, при подстановке которой ДУ обращается в тождество.

Опр Процесс решения (нахождения решения) ДУ наз. его интегрированием. График решения ДУ наз. интегральной кривой этого ДУ.

Общим решением ДУ наз. семейство ф-й, содержащее все решения ДУ. Если общее реш-е задано неявно, его наз. общим интегралом.

Пример. $y = e^x$, $y = e^x - 1$ - реш-е ДУ $y' = e^x$
$y = e^x + C$ — общее решение ур-я

Опр. Ф-я, кот. описывает одно из решений ДУ, наз. частным решением этого ДУ. Если частное решение задано в виде неявной ф-и $\Phi(x, y) = 0$, его наз частным интегралом.

§2. Дифференциальные уравнения I пор.

Рассмотрим ДУ I порядка

$$F(x, y, y') = 0$$

Опр. Если ДУ можно привести к виду $y' = f(x, y)$, его наз. уравнением, разрешенным относительно производной.

Уравнение I пор. также м. б. записано в виде: $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$.

Опр. Задача Коши для ДУ I пор. ставится следующим образом: найти решение ДУ $y' = f(x, y)$, удовл. нач. условию $y(x_0) = y_0$.

Теор. (Коши о ∃-и и единст-ти решения ДУ I порядка). Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^2$ ф-ии $f(x, y)$ и $\partial f / \partial y$ непр. Тогда для любой точки $(x_0, y_0) \in D$ задача Коши: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ имеет единственное решение. □

Опр. Функция $y = \varphi(x, C)$, опр-ная на некоторой области G плоскости переменных x и C, наз. общим решением ур-е $y' = f(x, y)$, если

(1) При любом фиксированном C ф-я $y = \varphi(x, C)$ есть решение ДУ.

(2) Для любой точки (x_0, y_0) $\exists\, C = C_0$ такое, что $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Опр. Если решение ДУ удается записать с помощью арифм. операций, операций взятия ф-и от ф-и и операции нахождения первообразной, применённое конечное число раз к элементарным ф-ям, то говорят, что это ДУ интегрируется в квадратурах.

Рассмотрим 4 типа ДУ I порядка, интегрируемых в квадратурах:

1) ДУ с разделяющимися переменными,
2) однородные ДУ,
3) линейные ДУ I пор.
4) уравнения Бернулли.

§3. ДУ с разделяющимися переменными

Опр. ДУ вида

$$f_1(x) f_2(y)\, dx = g_1(x) g_2(y)\, dy$$

наз. ДУ с раздел. переменными

или: $y' = f(x) g(y)$.

Если $g_1(x) = 0$ или $f_2(y) = 0$, то соотв. ф-я явл. решением ДУ (потерянным решением).

Если $g_1(x) \neq 0$, $f_2(y) \neq 0$, поделим на $g_1(x) f_2(y)$:

$$\frac{f_1(x)}{g_1(x)} dx = \frac{g_2(y)}{f_2(y)} dy$$

Вычислим интегралы от левой и правой части:

$$\int \frac{f_1(x)}{g_1(x)} dx = \int \frac{g_2(y)}{f_2(y)} dy + C,$$ где C – произв. постоянная

Получим общий интеграл уравнения.

Пример Решим уравнение $y' = xy$

разделим переменные, исп-я ф-лу $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$\int \frac{dy}{y} = \int x\, dx \Rightarrow \ln y = \frac{x^2}{2} + \ln C$$

$$\Rightarrow y = Ce^{\frac{x^2}{2}}$$ – общее решение

Потерянное решение $y = 0$ входит в общее решение при $C = 0$.

§4. Однородные уравнения

Опр. Функция $h(x, y)$ наз. однородной ф-ей степени k, если
$$h(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k h(x, y) \quad \forall x, y$$

Пример $\tilde{y} = x^2 + xy + y^2$ — одном. ф-я 2-ой степ.

Опр Уравнение вида
$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0.$$
наз. однородным, если ф-и $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — однородные ф-и одной степени.

Однородное уравнение можно свести к ДУ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Они сводятся к ДУ с разделяющимися перем.

$$\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = xu$$
$$y' = u + xu'$$

Подставим в уравнение:
$$u + xu' = f(u) \Rightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln x + C \text{ — общий интеграл}$$

При делении на $f(u) - u$ м.б. потеряны некоторые решения, их нужно добавить.

Пример. $(x - y)y\, dx = x^2\, dy \quad | : x^2$
$$\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2 = y'$$

Сделаем замену: $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux$
$$y' = u + xu'$$

Подставляем: $u - u^2 = u + xu'$
$$\int \frac{dx}{x} = -\int \frac{du}{u^2} \Rightarrow \ln|x| = \frac{1}{u} + C$$

Имеем, после обратной замены:
$$\ln|x| = \frac{x}{y} + C \text{ — общий интеграл ДУ}$$

§5. Линейные уравнения

Опр. ДУ вида

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

наз. линейным ДУ I пор. Если $q(x) \equiv 0$, то такое лин. ДУ наз. однородным, иначе — неоднородным.

ЛОДУ — ДУ с раздел. переменными. Для решения неоднородного применяются 2 метода:

① Метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной)

На первом шаге решаем соотв. однородное уравнение:

$$y' + p(x)\,y = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)\,dx \Rightarrow y = C e^{-\int p(x)\,dx}$$

Далее, считая C ф-ей от x, подставляем y в исходное уравнение. Тогда

$$y' = C' e^{-\int p(x) dx} + C e^{-\int p(x) dx} \cdot (-p(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C' e^{-\int p(x) dx} + \cancel{C e^{-\int p(x) dx} \cdot (-p(x))} + \cancel{p(x) \cdot C e^{-\int p(x) dx}} = q(x)$$

$$\Rightarrow C' e^{-\int p(x) dx} = q(x) \Rightarrow C = \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx}\,dx + \tilde{C}$$

Таким образом, решение ДУ имеет вид

$$y = \left(\int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} + \tilde{C}\right) e^{-\int p(x) dx} =$$

$$= \underbrace{\tilde{C} e^{-\int p(x) dx}}_{\text{общее реш-е одног. ур.}} + \underbrace{e^{-\int p(x) dx} \cdot \int q(x) e^{\int p(x) dx}\,dx}_{\text{частное реш-е неодн. ур-я}}$$

Пример. Решим уравнение $y' - 2\frac{y}{x} = 2x^3$

Решим соотв. одног. уравнение: $y' - 2\frac{y}{x} = 0$.

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C \Rightarrow y = Cx^2$$

Будем считать, что $C = C(x)$. Тогда

$y' = C'x^2 + 2Cx$. Подставляем в ДУ:

$C'x^2 + 2Cx - 2 \cdot Cx = 2x^3 \Rightarrow C' = 2x \Rightarrow C = x^2 + \tilde{C}$

Общее решение имеет вид: $y = (x^2 + \tilde{C})\,x^2 = \tilde{C}x^2 + x^4$.

② <u>Метод Бернулли</u> (<u>метод подстановки</u>)
Будем искать решение уравнения
$$y' + p(x)y = q(x)$$
в виде $y(x) = u(x)v(x)$; $y'(x) = u'v + uv'$.
Подставим в ДУ:
$$u'v + uv' + uvp(x) = q(x)$$
$$u'v + u\underbrace{(v' + vp(x))}_{=0} = q(x).$$
Будем считать, что ф-я $v(x)$ такая, что эта скобка $=0$: $v' + vp(x) = 0$.
Тогда решение ДУ сводится к последовательному интегрированию двух ДУ:
$$\begin{cases} v' + p(x)v = 0 & \Rightarrow v(x) \quad (\text{дост-но взять частн. реш.}) \\ u'v = q(x) & \Rightarrow u(x) \quad \Rightarrow y = v(x)u(x). \end{cases}$$
<u>Пример</u>. Решим уравнение $y' + y\,tgx = \frac{1}{\cos x}$.
Пусть $y = uv$, $y' = u'v + uv'$. Тогда
$$u'v + uv' + uv\,tgx = \frac{1}{\cos x}$$
$$u'v + u\underbrace{(v' + v\,tgx)}_{=0} = \frac{1}{\cos x}$$
Решим уравнение $v' + v\,tgx = 0$.
Разделим переменные и проинтегрируем:
$$\frac{dv}{v} = -tgx\,dx \Rightarrow v = \cos x$$
находим ф-ю $u(x)$:
$$u'\cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow u' = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow u = tgx + C$$
общее решение уравнения имеет вид:
$$y = (tgx + C)\cos x = \sin x + C\cdot\cos x$$

§6. Уравнение Бернулли

Опр. Уравнением Бернулли наз. ДУ вида
$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^{\alpha},\quad \alpha \neq 0, 1.$$
Для решения уравнения Бернулли есть 3 метода:
1) сведение к однородному,
2) метод вариации произв. пост.
3) метод Бернулли (подстановки).

Рассмотрим, как можно свести ур-е к лин.
Поделим уравнение на y^{α}:
$$\frac{y'}{y^{\alpha}} + p(x)\cdot y^{1-\alpha} = q(x)$$
Подведем y^{α} под знак дифференциала:
$$\frac{1}{1-\alpha}\,\frac{d(y^{1-\alpha})}{dx} + p(x)\cdot y^{1-\alpha} = q(x)$$
Замена $y^{1-\alpha} = z$ сводит уравнение к линейному. При $\alpha>0$ есть потерянное реш-е $y=0$.

Пример. Решим уравнение $y' + 2y = e^x y^2$
$y=0$ явл. решением ДУ. Поделим на $y^2 \neq 0$:
$$\frac{1}{y^2}\,\frac{dy}{dx} + 2\,\frac{1}{y} = e^x \Rightarrow -\frac{d\left(\frac{1}{y}\right)}{dx} + \frac{2}{y} = e^x$$
Замена $z = \frac{1}{y}$ сводит ДУ к линейному:
$$z' - 2z = -e^x.$$
Для решения этого ДУ применим метод вариации произвольной постоянной:
$$z' - 2z = 0 \Rightarrow z = Ce^{2x}$$
Считаем, что $C = C(x)$. Тогда $z' = C'e^{2x} + 2Ce^{2x}$.
Подставляем в ДУ:
$$C'e^{2x} + 2Ce^{2x} - 2Ce^{2x} = -e^x \Rightarrow C' = -e^{-x}$$
$$C = e^{-x} + \tilde{C}$$
Общее решение линейного уравнения:
$$z = (e^{-x} + \tilde{C})\,e^{2x} = e^x + \tilde{C}e^{2x}$$
общее решение исходного уравнения:
$$\frac{1}{y} = e^x + \tilde{C}e^{2x} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{\tilde{C}e^{2x} + e^x} \\ y = 0. \end{array}\right.$$

Лекция 10. Диф. уравнения n-го пор.

§1. Метод изоклин приближ. реш-я ДУ I пор.

Геометр. интерпретация ДУ I пор.:

Рассмотрим $y' = f(x,y)$.

Для каждой точки $(x;y)$ это уравнение определяет значение производной интегр. кривой, проходящей через эту точку. y' - угловой коэф-т касательной к кривой в точке $\Rightarrow$

уравнение $y' = f(x,y)$ в каждой точке определяет направление касательной к реш-ю, проходящему через эту точку.

На этом основан метод изоклин.

Опр. Изоклиной для ДУ $y' = f(x,y)$ наз. геометрической место точек, где $f(x,y) = k$, $k = const$

Т.о., изоклины – линии уровня ф-и $f(x;y)$.

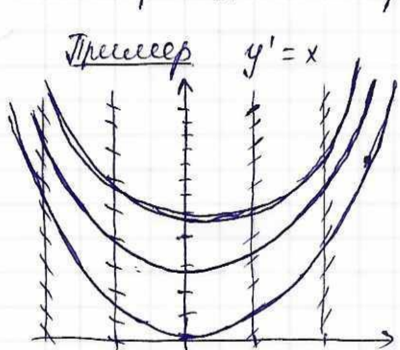
Опр. Полем направлений ДУ наз. мн-во касательных векторов к интегр. кривым уравнения.

Вдоль изоклины направление касат. вектора имеет постоянное значение.

Описание метода:

1) Для нескольких k построить кривые $f(x,y) = k$,
2) Построить поле направлений вдоль изоклин,
3) Построить кривые, кот. пересекают каждую изоклину парал-но проведенным отрезкам $\Rightarrow$ интегральные кривые ДУ

Пример $y' = x$



Уравнение изоклин: $x = k$ (вертик. прямые)

Общее решение:

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$