Лекция 10. Диф. уравнения n-го пор.

§1. Метод изоклин прибл. реш-я ДУ I пор.

Геометр. интерпретация ДУ I пор.

Рассмотрим $y' = f(x, y)$.

Для каждой точки $(x; y)$ это уравнение определяет значение производной интегр. кривой, проходящей через эту точку. y' - угловой коэф-т касательной к кривой в точке $\Rightarrow$

уравнение $y' = f(x, y)$ в каждой точке определяет направление касательной к реш-ю, проходящему через эту точку.

На этом основан метод изоклин.

Опр. Изоклиной для ДУ $y' = f(x, y)$ наз. геометрической место точек, где $f(x, y) = k$, $k = const$

Т.о., изоклины - линии уровня ф-и $f(x; y)$.

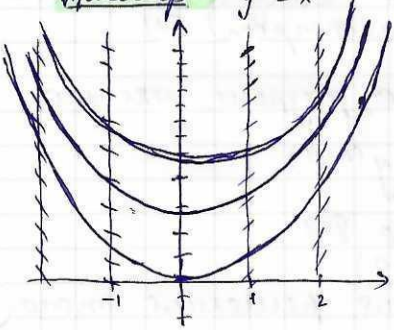
Опр. Полем направлений ДУ наз. мн-во касательных векторов к интегр. кривым уравнения.

Вдоль изоклины направление касат. вектора имеет постоянное значение.

Описание метода:

1) Для нескольких k построить кривые $f(x, y) = k$,
2) Построить поле направлений вдоль изоклин,
3) Построить кривые, кот. пересекают каждую изоклину парал-но проведенным отрезкам $\Rightarrow$ интегральные кривые ДУ

Пример $y' = x$



Уравнение изоклин: $x = k$ (вертик. прямые)

Общее решение:

$$y = \frac{x^2}{2} + C$$

§2. ДУ n-го порядка

Рассмотрим ДУ n-го пор.:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Опр. Ф-я $y = y(x)$, диф-мая n раз, наз. решением ДУ, если она обращает его в тождество.

Пример. $y'' + y = 0$ – ДУ 2-го пор.

$y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \sin x + \cos x$ – его реш-е

Опр. Семейство функций $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$ наз. общим решением ДУ n-го пор, если

1) при любом фиксир. наборе констант $C_1, \dots, C_n$ ф-я $y = y(x, C_1, \dots, C_n)$ явл. реш-ем ДУ

2) Для любой точки $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$ из области определения правых частей ДУ:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

найдутся числа $C_{10}, \dots, C_{n0}$ такие, что ф-я $y = y(x, C_{10}, \dots, C_{n0})$ определена на некотором интервале, содерж. т. x_0 и удовл. условиям:

$$y(x_0, C_{10}, \dots, C_{n0}) = y_0, \dots$$
$$y^{(n-1)}(x_0, C_{10}, \dots, C_{n0}) = y_0^{(n-1)}.$$

Опр. Если общее решение задано неявно уравнением $\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0$, его наз. общим интегралом ДУ.

Придавая константам $C_{10}, \dots, C_{n0}$ некоторые фиксированные значения, получаем частное решение (частный интеграл) ДУ.

Рассмотрим уравнение, разреш. отн-но старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

Опр. Задачей Коши для ДУ

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

наз. задача нахождения решения этого ДУ, удовл. условиям

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Теор. (Коши о ∃-и и единственности решения задачи Коши для ДУ n-го пор).
Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ф-я $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ непр. и имеет непрерывные частные производные по переменным $y, y', \dots, y^{(n-1)}$. Тогда для любой точки $(x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \in D$ решение задачи Коши:

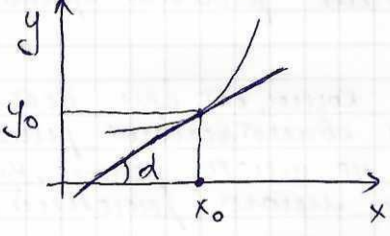
$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$
$$y(x_0) = y_0;\ y'(x_0) = y_0', \dots;\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

существует и единственно. □

Геом. интерпретация задачи Коши для ДУ II-го порядка:

$$\begin{cases} y'' = f(x, y, y'), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0' \end{cases}$$

найти решение ДУ $y'' = f(x, y, y')$, проходящее через заданную точку $(x_0; y_0)$ с заданным углом α наклона касательной $tg\,\alpha = y_0'$ к графику решения.



Из теор. Коши видно, что при дост-но общих условиях эта задача имеет единственное решение.

§3. Понятие краевой задачи

Опр. Краевой задачей наз. задача поиска такого решения ДУ n-го пор., кот. удовл. заданным значениям при различных значениях x.

Условия, кот. задают при различных значениях x, наз. краевыми условиями. Краевые условия м.б. I и II рода.

Краев. условие I рода: $y(x_1) = y_1$; $y(x_2) = y_2$;

Краев. условие II рода: $y'(x_1) = y_1'$; $y'(x_2) = y_2'$.

Геом-ки краевая задача I рода означает поиск такого решения ДУ, кот. проходит через 2 заданные точки. Краевая задача II рода означает, что требуется найти интегральную кривую ур-я, имеющую в точках x_1 и x_2 заданные наклоны касательных.

Рассматривают и смешанную краевую задачу, когда в разных точках задают краевые условия разного рода.

В отличие от задачи Коши, кот. при дост-но широких условиях имеет единственное решение, краевая задача может не иметь реш-й, иметь единств. реш-е или ∞ много решений.

Пример. Пусть задано ДУ $y'' + y = 0$.

Его общее решение $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

1) $y(0) = 1$, $y(\frac{\pi}{2}) = 1$ $\Rightarrow C_1 = C_2 = 1$. Краевая задача имеет единственное решение $y = \sin x + \cos x$

2) $y(0) = 1$, $y(\pi) = 1$ $\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ -C_1 = 1 \end{cases}$ - краевая задача не имеет решений

3) $y(0) = 1$, $y(\pi) = 1$ $\Rightarrow \begin{cases} C_1 = 1 \\ -C_1 = 1 \end{cases}$ $\Rightarrow$ краевая задача имеет ∞ много решений вида $y = \cos x + C_2 \sin x$

§ 4. Уравнения, допускающие понижение пор.

① Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$ решаются n-кратным интегр-ием ф-и $f(x)$:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1$$

$$y^{(n-2)} = \int \left(\int f(x)\,dx\right) dx + C_1 x + C_2$$

$$y = \underbrace{\int \Big(\int \dots \int}_{n\ \text{интегралов}} f(x)\,dx \Big) dx \dots \Big) dx + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_{n-1} x + C_n$$

Пример. $y''' = \sin x$

$$y'' = \int \sin x\,dx = -\cos x + C_1$$

$$y' = \int (-\cos x + C_1)\,dx = -\sin x + C_1 x + C_2$$

$$y = \int (-\sin x + C_1 x + C_2)\,dx = \cos x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$$

② Уравнение явно не содержит y и её производные до некоторого порядка:

$$F(x, y^{(k)}, \dots, y^{(n)}) = 0, \quad n > k.$$

Введем новую ф-ю: $p(x) = y^{(k)}(x)$. Тогда $p'(x) = y^{(k+1)}(x), \dots, p^{(n-k)}(x) = y^{(n)}(x)$.

Уравнение принимает вид:

$$F(x, p, p', \dots, p^{(n-k)}) = 0,$$ т.е.

порядок ДУ понизился на k.

Пример. $y''(x^2+1) = 2xy'$

Уравнение не содержит y явно $\Rightarrow$ допускает понижение порядка заменой $p = y'$, $p' = y''$.

Получим ДУ I пор.:

$$p'(x^2+1) = 2xp \quad (\text{ДУ с раздел. перем.})$$

$$\int \frac{dp}{p} = \int \frac{2x\,dx}{x^2+1} \Rightarrow \ln p = \ln|x^2+1| + \ln C_1$$

$$p = C_1 (x^2+1).$$

обратная замена: $y' = C_1(x^2+1)$

$\Rightarrow y = \int C_1 (x^2+1)\,dx = C_1\left(\frac{x^3}{3} + x\right) + C_2$ – общее реш-е

Решение $p=0$, потерянное при делении на p, входит сюда при $C_1 = 0$.

③ Уравнение явно не содержит независимую переменную x:

$$F(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0.$$

Введем новую переменную $p = y'$. Будем считать, что $p = p(y)$. Тогда

$y' = p(y)$;

$y'' = p'(y) \cdot y' = p'p$

$y''' = p'' \cdot y' p + p' p' y' = p'' p^2 + (p')^2 p$ и т.д.

В рез-те ур-е преобразуется к виду:

$$\tilde{F}(y, p, p', p'', \ldots, p^{(n-1)}) = 0$$

Удалось понизить порядок ДУ на 1.

Пример. $y'' = -2(y')^2 \operatorname{tg} y$

Уравнение явно не содержит $x \Rightarrow$ допускает понижение порядка заменой $y' = p(y)$; $y'' = p'p$. Получим ДУ 1 пор.:

$p'p = -2p^2 \operatorname{tg} y$ $\quad$ $p = 0$ – потер. решение

$p' = -2p \operatorname{tg} y$ – ДУ с раздел. перем.

$$\int \frac{dp}{p} = -2\int \operatorname{tg} y \, dy \Rightarrow \ln p = 2\ln|\cos y| + \ln C_1$$

$$p = C_1 \cos^2 y$$

Сделаем обратную замену: $y' = C_1 \cos^2 y$

Получим ДУ с раздел. переменными:

$\frac{1}{\cos^2 y} y' = C_1 \Rightarrow \operatorname{tg} y = C_1 x + C_2$ – общий интеграл уравнения