# Лекция 11. Линейные диф. уравнения

## §1. Понятие линейного уравнения (ЛДУ)

Опр. Линейным диф. уравнением $n$-го пор. наз. ДУ вида
$$y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x),$$
где ф-и $a_i(x)$, $b(x)$ заданы на некотором промежутке числовой прямой.

Если $b(x) \equiv 0$, то ЛДУ наз. однородным (ЛОДУ), иначе — неоднородным (ЛНДУ).

Теор. (о $\exists$-и и единст-ве решения задачи Коши для ЛДУ $n$-го пор) Пусть ф-и $a_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, $b(x)$ непр. на некотором промежутке $I \in \mathbb{R}$. Тогда $\forall x_0 \in I$ и любых чисел $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ решение задачи Коши
$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\, y' + a_n(x)\, y = b(x), \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$
существует и единственно.

Д-во: Запишем ДУ в виде
$$y^{(n)} = b(x) - a_1(x)\, y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1}(x)\, y' - a_n(x)\, y$$
Рассмотрим функцию
$$g(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = b(x) - a_1(x)\, y^{(n-1)} - \dots - a_{n-1}(x)\, y' - a_n(x)\, y.$$
Эта функция непр. в области $I \times \mathbb{R}^n$. Её частные производные по перем. $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ равны:
$$\partial g/\partial y = -a_n(x); \quad \partial g/\partial y' = -a_{n-1}(x); \dots; \quad \partial g/\partial y^{(n-1)} = -a_1(x)$$
и они тоже непр. в области $I \times \mathbb{R}^n$. По теор. Коши (для ДУ, разреш. отн-но старшей произв.) решение рассматриваемой задачи Коши существует и единственно.

Рассмотрим ЛНДУ $n$-го пор.:

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b(x).$$

Введём в рассмотрение дифференц. оператор:

$$L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y$$

Покажем, что $L_n$ — ~~дифференц.~~ линейный оператор.

1) Пусть $y_1, y_2$ - произв. $n$ раз диф-мые ф-и

$$L_n[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + a_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)(y_1 + y_2)' + a_n(x)(y_1 + y_2) =$$
$$= y_1^{(n)} + a_1(x)\,y_1^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\,y_1' + a_n(x)\,y_1 + y_2^{(n)} + a_1(x)\,y_2^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\,y_2' + a_n(x)\,y_2 =$$
$$= L_n[y_1] + L_n[y_2]$$

2) Пусть $y$ - произв. $n$ раз диф-мая ф-я, $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$L_n[\alpha y] = (\alpha y)^{(n)} + a_1(x)(\alpha y)^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)(\alpha y)' + a_n(x)(\alpha y) = \alpha\left(y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y\right) =$$
$$= \alpha L_n[y].$$

$\Rightarrow$ $L_n[y]$ — линейный оператор.

Опр Оператор

$$L_n[y] = y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y$$

наз. линейным диф. оператором $n$-го пор.

С использованием этого оператора ЛОДУ записывается в виде

$$L_n[y] = 0,$$

а ЛНДУ — в виде

$$L_n[y] = b(x).$$

## §2. Свойства частных решений ЛДУ

① **Теор.** Если $y_1, y_2$ — решения ЛОДУ $n$-го пор., то $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha y_1 + \beta y_2$ — тоже решение этого ЛОДУ.

Д-во: Рассмотрим уравнение $L_n[y]=0$.
По условию $L_n[y_1]=0$, $L_n[y_2]=0$.
Тогда $L_n[\alpha y_1 + \beta y_2] = \alpha L_n[y_1] + \beta L_n[y_2] = 0$
$\Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2$ — тоже решение ЛОДУ $L_n[y]=0$ ■

② **Теор.** Если $y_1, y_2$ — решения ЛНДУ $n$-го пор., то $y_1 - y_2$ — решение соотв. ЛОДУ.

Д-во: Рассмотрим уравнение $L_n[y]=b(x)$.
По условию $L_n[y_1]=b(x)$, $L_n[y_2]=b(x)$.
Тогда $L_n[y_1-y_2] = L_n[y_1] - L_n[y_2] = b(x) - b(x) = 0$
$\Rightarrow y_1 - y_2$ — решение уравнения $L_n[y]=0$. ■

③ **Теор.** Если $y_1$ — решение ЛОДУ $L_n[y]=0$, а $y_2$ — решение ЛНДУ $L_n[y]=b(x)$, то $y_1+y_2$ — решение ЛНДУ $L_n[y]=b(x)$.

Д-во: По условию $L_n[y_1]=0$, $L_n[y_2]=b(x)$.
Тогда в силу линейности
$L_n[y_1+y_2] = L_n[y_1] + L_n[y_2] = 0 + b(x) = b(x)$
$\Rightarrow y_1+y_2$ — решение ЛНДУ $L_n[y]=b(x)$. ■

Следствие (теор. 1). Решения ЛОДУ $n$-го пор. образуют линейное пространство.
Размерность этого линейного пространства установим позднее.

## §3. Линейно зависимые и линейно независимые системы функций.

Опр. Система функций $y_1,\dots,y_n$ наз. линейно зависимой в интервале $I \in \mathbb{R}$, если $\exists$ такие числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, не все $=0$, что $\lambda_1 y_1+\dots+\lambda_n y_n = 0$ $\forall x \in I$. Если рав-во $\lambda_1 y_1+\dots+\lambda_n y_n=0$ возможно только при $\lambda_1=\dots=\lambda_n=0$, то систему функций $y_1,\dots,y_n$ наз. линейно независимой.

Пример 1) Ф-и $y_1=x$, $y_2=2x$ – л/з на $\forall$ инт-ле;
2) Ф-и $y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=x^2$ – л/н на $\forall$ инт-ле. В самом деле, рассмотрим лин. комб-ю: $\lambda_1+\lambda_2 x+\lambda_3 x^2=0$. Рав-во $\lambda_1+\lambda_2 x+\lambda_3 x^2=0$ возможно только при $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, в прот. случае в правой части стоит многочлен, кот. не может иметь более двух действит. корней.

Опр. Пусть ф-и $y_1(x),\dots,y_n(x)$ имеют производные до $(n-1)$-го пор. включительно. Определитель функциональной матрицы вида

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_n(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_n'(x) \\ \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

наз. определителем Вронского системы ф-й $y_1(x),\dots,y_n(x)$.

Теор (об определителе Вронского л/з с-ы функций). Пусть ф-и $y_1(x),\dots,y_n(x)$ имеют все производные до $(n-1)$-го пор. включительно, на инт-ле $I \in \mathbb{R}$. Если с-а ф-й $y_1,\dots,y_n$ л/з на $I$, то их определитель Вронского $=0$ $\forall x \in I$.

Д-во: Система ф-й $y_1(x),\dots,y_n(x)$ л/з $\Rightarrow \exists$ такие числа $\lambda_1,\dots,\lambda_n$, не все $=0$, что

$$\lambda_1 y_1+\dots+\lambda_n y_n=0. \quad \forall x\in I.$$

Дифференцируя это равенство $(n-1)$ раз, имеем

$$\lambda_1 y_1^{(j)}+\dots+\lambda_n y_n^{(j)}=0,\quad j=\overline{1,n-1},\quad \forall x\in I.$$

$\Rightarrow$ столбцы опр-ля Вронского л/з $\Rightarrow W(x)=0$. ■

Следствие. Если определитель Вронского с-ы ф-й $y_1, .., y_n$ не равен тожд-но нулю на $I$, то эти функции линейно независимы на $I$.

Теор. (об опр-ле Вронского линейно независимой системы решений ЛОДУ $n$-го пор.). Пусть $y_1(x), .., y_n(x)$ — решения ЛОДУ $n$-го пор. $L_n[y]=0$, с непр. на $I$ коэф-тами $a_i(x)$, $i=\overline{1,n}$. Для того, чтобы ф-и $y_1(x), .., y_n(x)$ были линейно независимы на $I$, необх-мо и дост-но, чтобы их определитель Вронского не обращался в 0 ни в одной точке интервала $I$.

Д-во: ($\Rightarrow$) Необходимость

Пусть $y_1, .., y_n$ л/н на $I$. Покажем, что $W(x) \neq 0$ на $I$. От противного.

Пусть $\exists x_0 \in I: W(x_0)=0$. Рассмотрим СЛАУ:

$$\begin{cases} \lambda_1 y_1(x_0) + \ldots + \lambda_n y_n(x_0) = 0 \\ \lambda_1 y_1'(x_0) + \ldots + \lambda_n y_n'(x_0) = 0 \\ \ldots \\ \lambda_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \lambda_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

Её определитель $\Delta = W(x_0) = 0 \Rightarrow$ СЛАУ имеет нетривиальное решение $\lambda_1^*, .., \lambda_n^*$. Расм. ф-ю:

$$y(x) = \lambda_1^* y_1(x) + \ldots + \lambda_n^* y_n(x).$$

Эта ф-я явл. решением ЛОДУ $L_n[y]=0$ по теор.1 о св-вах частных решений ЛДУ, причем

$$y(x_0) = \lambda_1^* y_1(x_0) + \ldots + \lambda_n^* y_n(x_0) = 0 \quad (1\text{-е ур-е})$$

$$y'(x_0) = \lambda_1^* y_1'(x_0) + \ldots + \lambda_n^* y_n'(x_0) = 0 \quad (2\text{-е ур-е})$$

$$\ldots$$

$$y^{(n-1)}(x_0) = \lambda_1^* y_1^{(n-1)}(x_0) + \ldots + \lambda_n^* y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (\text{из } n \text{ ур.})$$

$\Rightarrow y(x)$ — решение след. задачи Коши:

$$\begin{cases} L_n[y] = 0 \\ y(x_0) = 0;\ y'(x_0) = 0;\ \ldots;\ y^{(n-1)}(x_0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ по теор. Коши о $\exists$-и и ед-ти реш-я з. К.

$$y(x) \equiv 0 \Rightarrow \lambda_1^* y_1(x) + \ldots + \lambda_n^* y_n(x) = 0. \text{ Противоречие.}$$

($\Leftarrow$) Достаточность.

Пусть $W(x) \neq 0$ на $I$. Покажем, что $y_1, .., y_n$ л/н. От противного. Пусть $y_1, .., y_n$ л/з $\Rightarrow W(x) = 0$. Получили противоречие. ∎

Т.о., если $y_1, .., y_n$ — реш-е ЛОДУ $L_n[y]=0$, то

- либо $y_1, .., y_n$ л/з и $W(x)=0$ на $I$;
- либо $y_1, .., y_n$ л/н и $W(x) \neq 0$ на $I$.

## §4. Общее решение ЛОДУ.

Опр. Систему из $n$ линейно независимых решений ЛОДУ $L_n[y]=0$ наз. фундаментальной системой решений (ФСР) этого ур-я.

Теор (о существовании ФСР). Для ЛОДУ $L_n[y]=0$ с непр. коэф-тами $a_i(x)$, $i=\overline{1,n}$, на $I$, существует ФСР.

Д-во: Пусть $y_1(x), \dots, y_n(x)$ — решение ЛОДУ $L_n[y]=0$, удовлетворяющие нач. условиям:

$$y_1(x_0)=1,\ y_1'(x_0)=0, \dots, y_1^{(n-1)}(x_0)=0,$$
$$y_2(x_0)=0,\ y_2'(x_0)=1, \dots, y_n^{(n-1)}(x_0)=0,$$
$$\dots$$
$$y_n(x_0)=0,\ y_n'(x_0)=0, \dots, y_n^{(n-1)}(x_0)=1.$$

Существование таких решений гарантирует теорема о $\exists$-и и ед-ти решения задачи Коши для ЛДУ $n$-го пор.

Пусть $W(x)$ — опр-ль Вронского этих реш-й. Тогда

$$W(x_0) = \begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) & \dots & y_n(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) & \dots & y_n'(x_0) \\ \dots \\ y_1^{(n-1)}(x_0) & y_2^{(n-1)}(x_0) & \dots & y_n^{(n-1)}(x_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$\Rightarrow$ система функций $y_1, \dots, y_n$ линейно независима на $I$ $\Rightarrow$ $y_1, \dots, y_n$ — ФСР ЛОДУ $L_n[y]=0$. ∎

Теор. (о структуре общего решения ЛОДУ). Пусть $y_1, \dots, y_n$ — ФСР ЛОДУ $n$-го пор. $L_n[y]=0$, с непр. на $I$ коэф-тами $a_i(x)$, $i=\overline{1,n}$. Тогда общее решение этого уравнения имеет вид

$$y_{oo} = C_1 y_1(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

где $C_1, \dots, C_n$ — произвольные постоянные.

Д-во: По теор. 1 о св-вах частных решений ЛДУ ф-я $y_{oo}$ является решением ЛОДУ $L_n[y]=0$ при любых значениях $C_1, \dots, C_n$.

Покажем, что любое решение уравнения $L_n[y]=0$ м.б. представлено в таком виде.

Пусть $\tilde{y}(x)$ – решение такой задачи Коши:

$$\begin{cases} L_n[y]=0, \\ y(x_0)=y_0;\ y'(x_0)=y_0';\ \ldots;\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Составим СЛАУ:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0)+C_2 y_2(x_0)+\ldots+C_n y_n(x_0)=y_0; \\ C_1 y_1'(x_0)+C_2 y_2'(x_0)+\ldots+C_n y_n'(x_0)=y_0'; \\ \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+C_2 y_2^{(n-1)}(x_0)+\ldots+C_n y_n^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}. \end{cases}$$

Определитель этой СЛАУ $\Delta=W(x_0)\neq 0$ $\Rightarrow$ система имеет единственное решение $C_1^0, \ldots, C_n^0$. Тогда решение

$$y_0(x)=C_1^0 y_1(x)+\ldots+C_n^0 y_n(x)$$

уравнения $L_n[y]=0$ удовлетворяет тем же условиям, что и $\tilde{y}(x)$ $\Rightarrow$ по теор. о $\exists$-и и единст-ти решения задачи Коши для ЛДУ $\tilde{y}(x)=y_0(x)$, т.е. $\tilde{y}(x)$ м.б. представлено в виде:

$$\tilde{y}(x)=C_1^0 y_1(x)+\ldots+C_n^0 y_n(x) \text{ при нек. } C_i^0.$$

Значит, любое решение ур-я $L_n[y]=0$ представляет собой линейную комбинацию функций из ФСР $\Rightarrow$ $y_{oo}$ м.б. записана в виде $y_{oo}=C_1 y_1+\ldots+C_n y_n$. ■

<u>Замечание</u>. Таким образом, множество решений ЛОДУ $L_n[y]=0$ образует $n$-мерное линейное пространство. Базисом этого лин. прост-ва явл. ФСР ур-я.