Лекция 12. Формула Остроградского-Лиувилля ЛОДУ с пост. коэф-тами

§1. Формула Остроградского для ЛОДУ II-го пор.

Рассмотрим ЛОДУ II-го пор.

$$y'' + a_1(x)\,y' + a_2(x)\,y = 0,$$

где функции $a_1(x)$, $a_2(x)$ непр на I.

Для определителя Вронского решений ЛОДУ y_1, y_2 имеем

$$W'(x) = \frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1(x)y_1' - a_2(x)y_1 & -a_1(x)y_2' - a_2(x)y_2 \end{vmatrix} + a_2(x)\cdot I =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -a_1(x)\,y_1' & -a_2(x)\,y_2' \end{vmatrix} = -a_1(x)\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{dW}{dx} + a_1(x)\,W(x) = 0.$$

Это ДУ с раздел. переменными. Решая его, получим

$$\frac{dW}{W} = -a_1(x)\,dx \Rightarrow \boxed{W = Ce^{-\int a_1(x)\,dx}}$$

Пусть $x_0 \in I$ — произв. точка. Тогда $\int_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx$ — одна из первообразных ф-ии $a_1(x)$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow W = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx}$$ При $x = x_0$ $W(x_0) = C \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{W(x) = W(x_0)\,e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(x)\,dx}}$$ — формула Остроградского-Лиувилля

Замечание. Хотя формула выведена для ДУ II пор, она верна и для ЛОДУ более высоких порядков.

§2. Нахождение общего решения ЛОДУ 2-го пор. по известному частному реш.

Рассмотрим ЛОДУ 2-го пор.

$$y'' + a_1(x)\, y' + a_2(x)\, y = 0, \quad a_1(x),\ a_2(x) \text{ непр. на } I$$

Пусть y_1 – известное частное решение этого уравнения. Для нахождения общего решения ДУ рассмотрим 2 способа.

1 способ основан на приведении ДУ к виду, допускающему понижение порядка.

Пусть $y = z y_1$

$$y' = z' y_1 + z y_1'$$

$$y'' = z y_1'' + 2z' y_1' + z'' y_1$$

Подставляем в ДУ:

$$z y_1'' + 2z' y_1' + z'' y_1 + a_1(x)\left(z' y_1 + z y_1'\right) + a_2(x) z y_1 = 0.$$

Вынесем z за скобки:

$$z\underbrace{\left(y_1'' + a_1(x) y_1' + a_2(x) y_1\right)}_{=0,\ \text{т.к. } y_1 \text{ – решение уравнения}} + 2z' y_1' + z'' y_1 + a_1(x) z' y_1 = 0$$

Получаем ДУ

$$z'' y_1 + 2z' y_1' + a_1(x) z' y_1 = 0,$$

кот. допускает понижение порядка заменой $z' = p,\ z'' = p'$.

2 способ основан на формуле Остроградского-Лиувилля.

Пусть y_1 – известное частное решение ЛОДУ. Определим y_2 – другое частное решение этого уравнения.

Определитель Вронского с-ы ф-й y_1, y_2:

$$W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 \qquad | : y_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{W(x)}{y_1^2} = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \left(\frac{y_2}{y_1}\right)' \quad \text{– получим ДУ}$$

$$\frac{y_2}{y_1} = \int \frac{W(x)}{y_1^2}\,dx + B \Rightarrow y_2 = y_1 \int \frac{Ce^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}\,dx + By_1$$

Поскольку достаточно взять линейно незави-симое с y_1 решение, положим

$$\boxed{y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int a_1(x)dx}}{y_1^2}\,dx}$$

Тогда общее решение ЛОДУ 2-го пор. имеет вид:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2$$

Замечание. ЛОДУ 2-го пор. может быть задано в виде

$$b_0(x) y'' + b_1(x) y' + b_2(x) y = 0.$$

Тогда перед применением полученной выше формулы его нужно поделить на $b_0(x)$:

$$y'' + \frac{b_1(x)}{b_0(x)} y' + \frac{b_2(x)}{b_0(x)} y = 0.$$

Пример. Найдем общее решение ЛОДУ

$$x^2 y'' - x y' - 3y = 0,$$

если известно его частное решение $y_1 = \frac{1}{x}$.

Поделим на x^2:

$$y'' \underbrace{- \frac{1}{x}}_{a_1(x)} y' - \frac{3}{x^2} y = 0$$

Применим формулу-следствие из ф-лы Остроградского-Лиувилля

$$y_2 = \frac{1}{x} \int \frac{e^{-\int(-\frac{1}{x})dx}}{(\frac{1}{x})^2} dx = \frac{1}{x} \int x^3 dx = \frac{x^3}{4}$$

Тогда общее решение уравнения им. вид

$$y = C_1 \frac{1}{x} + C_2 x^3$$

§3 ЛОДУ 2-го пор. с постоянными коэффициентами

Рассмотрим ДУ
$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0, \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \qquad (1)$$
Опр. Характеристическим уравнением ур-я (1) наз. квадратное уравнение вида
$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0. \qquad (2)$$
Для корней характеристического уравнения (х.у.) возможен один из трех случаев:
1) корни х.у. действительны и различны;
2) уравнение имеет единств. действ. корень кратности 2
3) уравнение имеет пару комплексно-сопряжённых корней

В зависимости от корней х.у. (2) общее решение уравнения (1) может быть записано по-разному. Эту взаимосвязь устанавливают следующие теоремы.

① Теор. (общее решение ЛОДУ 2-го пор. с постоянными коэф-тами в случае действ. корней) Пусть λ_1, λ_2 — действ. различные корни х.у. (2). Тогда общее решение ЛОДУ (1) имеет вид
$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$
Д-во: Функции $e^{\lambda_1 x}$ и $e^{\lambda_2 x}$ линейно независимы при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, поскольку
$$W(x) \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 x} & e^{\lambda_2 x} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 x} & \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \end{vmatrix} = (\lambda_2 - \lambda_1) e^{(\lambda_1 + \lambda_2) x} \neq 0$$
Пусть $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, тогда $y_1' = \lambda_1 e^{\lambda_1 x}$, $y_1'' = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x}$.
Подставив в уравнение (1), получим
$$\lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + a_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_1 x} = 0 \quad | : e^{\lambda_1 x}$$
$\Rightarrow \lambda_1^2 + a_1 \lambda_1 + a_2 = 0$ — верно, т.к. λ_1 — корень (2).
След-но, y_1 явл. решением ЛОДУ (1).
Аналогично $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ явл. решением (1).
$\Rightarrow y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$ образует общее решение ур-е (1). ∎

② Теор (общее решение ЛОДУ 2-го пор. с постоянными коэф-тами в случае кратных корней). Пусть λ_0 — действительный корень уравнения (2) кратности 2. Тогда общее решение уравнения (1) им. вид

$$y = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x}$$

Д-во: Функция $y_1 = e^{\lambda_0 x}$ явл. решением уравнения (1), в чем можно убедиться подстановкой. Найдем второе решение с помощью следствия из формулы Остроградского-Лиувилля. Заметим, что в случае кратных корней $\lambda_0 = -a_1/2$.

$$y_2 = e^{\lambda_0 x} \int \frac{e^{-\int a_1 dx}}{e^{2\lambda_0 x}} dx = e^{\lambda_0 x} \int e^{\overbrace{(-a_1 + 2\lambda_0)}^{=0} x} dx =$$

$$= e^{\lambda_0 x} \int dx = x e^{\lambda_0 x}$$

Решения y_1, y_2 линейно независимы, поскольку их определитель Вронского

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_0 x} & x e^{\lambda_0 x} \\ \lambda_0 e^{\lambda_0 x} & e^{\lambda_0 x}(1 + \lambda_0 x) \end{vmatrix} = e^{2\lambda_0 x} \neq 0$$

$\Rightarrow$ Функции y_1, y_2 образуют ФСР ур-е (1). по теор. о структуре общего решения:

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 = C_1 e^{\lambda_0 x} + C_2 x e^{\lambda_0 x} -$$

общее решение уравнения (1). ■

③ Теор. (общее решение ЛОДУ 2-го пор с пост. коэффициентами в случае комплексных корней). Пусть $\alpha \pm \beta i$ — пара комплексно-сопряженных корней уравнения (2). Тогда общее решение уравнения (1) имеет вид

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$$

Д-во: Если $\alpha \pm \beta i$ — корни уравнения (2), то функции $y_1 = e^{(\alpha + i\beta)x}$, $y_2 = e^{(\alpha - i\beta)x}$ — решения уравнения (1).

Покажем, что если комплексно-значная функция $u(x) + i v(x)$ явл. решением уравнения (1), то ф-и $u(x)$, $v(x)$ — тоже решения этого уравнения.

Уравнение (1) в операторном виде:

$L_2[y]=0$.

$\Rightarrow L_2[u(x)+iv(x)] = L_2[u(x)] + i\,L_2[v(x)] = 0$.

Комплексное число равно нулю, если равны нулю его действ. и мнимая часть

$\Rightarrow L_2[u(x)]=0, \quad L_2[v(x)]=0 \Rightarrow u(x), v(x)$ - реш-е (1).

Рассмотрим ф-ю $e^{(\alpha+\beta i)x}$:

$$e^{(\alpha+\beta i)x} = e^{\alpha x}\cdot e^{\beta i x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + i\sin\beta x) =$$

$$= \underbrace{e^{\alpha x}\cos\beta x}_{u(x)} + i\cdot\underbrace{e^{\alpha x}\sin\beta x}_{v(x)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Функции $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ явл. решениями уравнения (1). Эти функции линейно независимы, т.к.

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{\alpha x}\cos\beta x & e^{\alpha x}\sin\beta x \\ e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) & e^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x)\end{vmatrix} = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$$ при $\beta \neq 0$.

$\Rightarrow$ Ф-и y_1, y_2 образуют ФСР ур-е (1). По теор. о структуре общего решения ЛОДУ:

$y = C_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + C_2 e^{\alpha x}\sin\beta x$ – общее решение уравнения (1). ∎

Пример 1) $y''-y=0$

х.у.: $\lambda^2-1=0 \Rightarrow \lambda_1=1, \ \lambda_2=-1$.

по 1-ой теор. получим $y = C_1e^x + C_2e^{-x}$

2) $y''+4y'+4y=0$

х.у.: $\lambda^2+4\lambda+4=0 \Rightarrow \lambda_1=-2$ кратности 2

по 2-ой теор. получим $y = C_1e^{-2x} + C_2xe^{-2x}$

3) $y''+4y=0$

х.у.: $\lambda^2+4=0 \Rightarrow \lambda=\pm 2i$ - компл. корни

по 3-ей теор. получим

$y_1 = e^{0x}\cos 2x$; $y_2 = e^{0\cdot x}\sin 2x$

$\Rightarrow y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$ – общее решение