Лекция 13. Линейные неоднородные уравнения

§1. ЛОДУ n-го пор. с пост. коэффициентами

Рассмотрим теперь линейное однородное ДУ n-го пор. с постоянными коэф-тами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \quad (1)$$

где $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$

Опр. Характеристическим уравнением ур-я (1) наз. алгебраическое ур-е вида

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (2)$$

Пусть известны все решения уравнения (2) с учетом их кратностей. Тогда ФСР ур-я (1) строится по след. правилам:

1) Если λ_1 – действ. корень ур-я (2), то $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ – решение ур-я (1).

2) Если λ_1 – действ. корень кратн. r ур-я (2), то $y_1 = e^{\lambda_1 x}$, $y_2 = xe^{\lambda_1 x}, \ldots, y_r = x^{r-1}e^{\lambda_1 x}$ – решения ур-я (1).

3) Если $\alpha \pm \beta i$ – пара комплексно-сопр. корней ур-я (2), то $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ – решения ур-я (1).

4) Если $\alpha \pm \beta i$ – пара комплексно-сопряжённых корней ур-я (2) кратности r каждой, то $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$, $y_3 = xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_4 = xe^{\alpha x}\sin\beta x, \ldots, y_{2r-1} = x^{r-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_{2r} = x^{r-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$ – решения ур-я (1).

Пример. 1) $y^{IV} + y'' = 0$

х. у.: $\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2(\lambda^2+1) = 0$

Корни х. у. $\lambda_{1,2} = 0$, $\lambda_{3,4} = \pm i$

ФСР: $y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = \cos x$, $y_4 = \sin x$

общ. реш-е: $y = C_1 + C_2 x + C_3\cos x + C_4 \sin x$

2) $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$

х. у.: $\lambda^4 + 8\lambda^2 + 16 = 0 \Rightarrow (\lambda^2+4)^2 = 0$

корни х. у.: $\lambda_{1,2} = 2i$, $\lambda_{3,4} = -2i$

ФСР: $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = x\cos 2x$, $y_3 = \sin 2x$, $y_4 = x\sin 2x$

общее реш-е: $y = (C_1 + C_2 x)\cos 2x + (C_3 + C_4 x)\sin 2x$

§2. ЛНДУ n-го пор

Рассмотрим уравнение

$$y^{(n)} + a_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)\,y' + a_n(x)\,y = b(x)$$

или $L_n[y] = b(x)$, где $a_i(x)$ непр. на I.

Теор. (о структуре общего решения ЛНДУ n-го пор)
Пусть $y_{чн}$ - частн. реш-е ЛНДУ $L_n[y] = b(x)$,
$y_{оо}$ - общее реш-е ЛОДУ $L_n[y] = 0$.
Тогда общее реш-е ЛНДУ $L_n[y] = b(x)$ им. вид:

$$y_{он} = y_{чн} + y_{оо},$$

т.е. любое реш-е ур-е $L_n[y] = b(x)$ м.б. представлено в виде:

$$y(x) = y_{чн} + C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n,$$

где $y_1, \ldots, y_n$ - ФСР общор ур-е $L_n[y] = 0$,
$C_1, \ldots, C_n$ - произв. постоянные

Д-во: Ф-е $y(x)$ при любых C_i явл. решением ур-е $L_n[y] = b(x)$. В самом деле,

$$L_n[y(x)] = L_n[y_{чн} + C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n] = \underbrace{L_n[y_{чн}]}_{=b(x)} + C_1 \cdot \underbrace{L_n[y_1]}_{=0} + \ldots + C_n \underbrace{L_n[y_n]}_{=0} = b(x).$$

Покажем, что любое решение ур-е $L_n[y] = b(x)$ м.б. представлено в этом виде. Пусть $y(x)$ - произв. решение $L_n[y] = b(x)$. Тогда $y(x)$, $y_{чн}$ - два разных решения $L_n[y] = b(x)$ $\Rightarrow$ по св. вам частных решений их разность явл. реш-ем $L_n[y] = 0$.
По теор. о структуре общего решение ЛОДУ n-го пор:

$$y(x) - y_{чн} = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(x) = y_{чн} + C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n. \quad ■$$

Теор. (принцип наложения решений). Пусть $\overline{y}_1$ - решение $L_n[y] = b_1(x), \ldots, \overline{y}_m$ - решение $L_n[y] = b_m(x)$.
Тогда $\overline{y}_1 + \ldots + \overline{y}_m$ - решение $L_n[y] = b_1(x) + \ldots + b_m(x)$.

Д-во: Рассмотрим $\overline{y}_1 + \ldots + \overline{y}_m$:

$$L_n[\overline{y}_1 + \ldots + \overline{y}_m] = \cancel{b_1(x) + \ldots + b_m(x)}$$

$$= L_n[\overline{y}_1] + \ldots + L_n[\overline{y}_m] = b_1(x) + \ldots + b_m(x) \Rightarrow$$

эта ф-я явл. реш-ем $L_n[y] = b_1(x) + \ldots + b_m(x)$. ■

§3. Решение ЛНДУ 2-го пор. с пост. коэф-тами и специальной правой частью

Сначала рассмотрим уравнение:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = b(x).$$

Будем считать, что $b(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$ – заданный многочлен степени n.

Ищем реш-е $y_{чн}$ расм. ур-е в виде $y_{чн} = e^{\alpha x} Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен, подлежащий определению. Подставим в ДУ:

$$y_{чн}' = \alpha e^{\alpha x} Q(x) + e^{\alpha x} Q'(x)$$

$$y_{чн}'' = \alpha^2 e^{\alpha x} Q(x) + 2\alpha e^{\alpha x} Q'(x) + e^{\alpha x} Q''(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 e^{\alpha x} Q(x) + 2\alpha e^{\alpha x} Q'(x) + e^{\alpha x} Q''(x) +$$
$$+ a_1 (\alpha e^{\alpha x} Q(x) + e^{\alpha x} Q'(x)) + a_2 e^{\alpha x} Q(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$

Поделим на $e^{\alpha x}$ и сгруппируем:

$$(\alpha^2 + a_1\alpha + a_2) Q(x) + (2\alpha + a_1) Q'(x) + Q''(x) = P_n(x)$$

Возможны 3 случая:

① α не явл. корнем х.у. $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.
Тогда $Q(x) \equiv Q_n(x)$ – многочлен степ. n с неопр. коэф.
В левой и правой части многочлены степ. n. Коэф-ты многочлена $Q_n(x)$ можно найти, приравняв коэф-ты при одинаковых степенях.

② α – корень х.у. кратности 1
Тогда $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$, но $2\alpha + a_1 \neq 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2\alpha + a_1) Q'(x) + Q''(x) = P_n(x)$$

Возьмем $Q'(x) \equiv Q_n(x) \Rightarrow Q(x) = x Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен n-го пор. с неопр. коэф.

③ α – корень х.у. кратности 2
Тогда $\alpha^2 + a_1\alpha + a_2 = 0$, $2\alpha + a_1 = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q''(x) = P_n(x)$$

Пусть $Q''(x) \equiv Q_n(x) \Rightarrow Q(x) = x^2 Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен n-го пор. с неопр. коэф.

В случаях ② и ③ коэф-ты многочлена $Q_n(x)$ также можно найти с помощью метода неопр. коэф-тов.

§4. Решение ЛНДУ n-го пор. с пост. коэф-тами и специальной правой частью

Рассмотрим ЛНДУ n-го пор.:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = b(x), \quad a_i \in \mathbb{R}$$

Опр. Квазимногочленом будем называть ф-ю вида $e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x)$, где $P(x), Q(x)$ - заданные многочлены.

Пусть правая часть рассм. ур-е задана в виде квазимногочлена. Тогда частное решение $y_{чн}$ этого ЛНДУ можно искать в виде:

① $b(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$ (многочлен степ. n)

α - не корень х.у.
$y_{чн} = e^{\alpha x} Q_n(x)$

α - корень х.у. кратн. r
$y_{чн} = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$,

где $Q_n(x)$ - многочлен степ. n с неопр. коэф.

② $b(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)$

$\alpha \pm \beta i$ - не корни х.у.
$y_{чн} = e^{\alpha x}(T_N(x)\cos\beta x + S_N(x)\sin\beta x)$

$\alpha \pm \beta i$ - корни х.у. кратн. r
$y_{чн} = x^r e^{\alpha x}(T_N(x)\cos\beta x + S_N(x)\sin\beta x)$,

где $N = \max\{n, m\}$,
$T_N(x), S_N(x)$ - многочлены степ. n с неопр. коэф.

Для нахождения неопр. коэф-тов многочленов применяем метод неопр. коэф-тов: подставляем $y_{чн}$ в ДУ, сокращаем на $e^{\alpha x}$ и приравниваем коэф-ты при одинаковых ф-ях.

Пример. 1) $y'' + y = e^x$
общее решение одноp. ур-е $y = C_1\cos x + C_2 \sin x$
$b(x) = e^x$, 1 - не корень х.у. $\Rightarrow$ частное реш-е будем искать в виде
$y_{чн} = Ae^x$, $y_{чн}' = Ae^x$, $y_{чн}'' = Ae^x$
Подставляем в неодн. ур-е:
$2Ae^x = e^x \Rightarrow A = 1/2. \Rightarrow y_{чн} = \frac{1}{2}e^x$
Общее решение неодн. ур-е:
$y = C_1\cos x + C_2\sin x + \frac{1}{2}e^x$

2) $y'' - y = 2e^x$

общее решение одн. ур-е: $y_{oo} = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$

$b(x) = 2e^x$, $\alpha = 1$ – корень х.у. кратн. 1 $\Rightarrow$

частное решение неодн. ур-е ищем в виде

$y_{чн} = Axe^x$, $y_{чн}' = Ae^x + Axe^x$, $y_{чн}'' = 2Ae^x + Axe^x$

Подставляем в неодн. ур-е:

$2Ae^x + Axe^x - \cancel{Axe^x} = 2e^x \Rightarrow A = 1 \Rightarrow y_{чн} = xe^x$.

Общее решение неодн. ур-е им. вид:

$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + xe^x$

Замечание. Если правая часть ЛНДУ n-го пор. задана в виде суммы нескольких квазимногочленов, для нахождения частного решения применяем принцип наложения решений: находим частн. реш-е, соотв. каждому из квазимногочленов и суммируем их.

Пример. $y^{IV} + y'' = (x+1)\cos x + 3e^x - 1$

х.у.: $\lambda^4 + \lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2(\lambda^2+1) = 0$

Корни х.у. $\lambda_{1,2} = 0$; $\lambda_{3,4} = \pm i$

общее реш-е одн. ур-е: $y_{oo} = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x$

Правая часть имеет вид суммы трех квазимногочленов. Рассмотрим каждое из слагаемых:

1) $b_1(x) = (x+1)\cos x$

$\pm i$ – корни х.у. (кратности 1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{чн_1} = x((A_1 x + A_2)\cos x + (A_3 x + A_4)\sin x)$

2) $b_2(x) = 3e^x$

1 – не корень х.у. $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{чн_2} = A_5 e^x$

3) $b_3(x) = -1 \quad (= -1 \cdot e^{0x})$

0 – корень х.у. кратности 2 $\Rightarrow$

$\Rightarrow y_{чн_3} = A_6 x^2$

След-но, частное решение неодн. ур-е имеет вид:

$$y_{чн} = x((A_1 x + A_2)\cos x + (A_3 x + A_4)\sin x) + A_5 e^x + A_6 x^2$$

при нек. зн-ях неопр. коэф-тов $A_1, \ldots, A_7$.

§5. Метод Лагранжа вариации произв. постоянных

Пусть $y_1, \dots, y_n$ – ФСР одн. ур-е $L_n[y]=0$.
Тогда частное решение неодн. ур-е $L_n[y]=b(x)$ можно искать в виде:

$$y = C_1(x)y_1 + \dots + C_n(x)y_n,$$

где ф-и $C_i(x)$ определяются из с-ы:

$$\begin{cases} C_1'y_1 + \dots + C_n'y_n = 0, \\ C_1'y_1' + \dots + C_n'y_n' = 0, \\ \dots \\ C_1'y_1^{(n-1)} + \dots + C_n'y_n^{(n-1)} = b(x) \end{cases}$$

Опр-ль этой с-ы равен опр-лю Вронского с-ы ф-й $y_1, \dots, y_n$ $\Rightarrow$ система имеет единств. реш-е отн-но $C_1', \dots, C_n'$, а сами ф-и $C_i(x)$ находятся интегрированием C_i'.

Докажем корректность метода для $n=2$.
Пусть дано ЛНДУ: $y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x)$
общ. реш-е ЛОДУ: $y = C_1y_1 + C_2y_2$
Будем искать реш-е неодн. ур-е в виде
$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2$. Тогда:

$$y'(x) = \underbrace{C_1'y_1 + C_2'y_2}_{=0} + C_1y_1' + C_2y_2' = C_1y_1' + C_2y_2'$$

$$y''(x) = \underbrace{C_1'y_1' + C_2'y_2'}_{=b(x)} + C_1y_1'' + C_2y_2'' = b(x) + C_1y_1'' + C_2y_2''$$

Подставим в ДУ:

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) + C_1y_1'' + C_2y_2'' +$$
$$+ a_1(x)(C_1y_1' + C_2y_2') + a_2(x)(C_1y_1 + C_2y_2) =$$
$$= b(x) + C_1\underbrace{(y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1)}_{=0} + C_2\underbrace{(y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2)}_{=0}$$

$\Rightarrow$ Решение можно искать в заданном виде.

Пример. $y'' + y = 1/\cos x$
Реш-е одмор. ур-е: $y_{oo} = C_1\cos x + C_2\sin x$
Система метода вариации:

$$\begin{cases} C_1'\cos x + C_2'\sin x = 0, \\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x = \frac{1}{\cos x} \end{cases} \quad \begin{vmatrix} \cdot\sin x \\ + \\ \cdot\cos x \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} \cdot\cos x \\ - \\ \cdot\sin x \end{vmatrix}$$

$$C_2' = 1 \qquad C_1' = \operatorname{tg} x$$

$\Rightarrow C_1 = \ln|\cos x| + \tilde{C}_1$; $C_2 = x + \tilde{C}_2$
общее решение неодн. ур-е:

$$y_{он} = C_1\cos x + C_2\sin x + \cos x \cdot \ln|\cos x| + x\sin x$$