Лекция 14. Нормальные системы ОДУ

§1. Понятие нормальной системы

Опр. Нормальной системой ОДУ наз. с-у вида

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \dots, y_n) \qquad (1) \\ \dots \\ \frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{cases}$$

или $y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n)$, $i = \overline{1, n}$,
где x – независимая переменная,
$y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$ – неизвестные ф-и,
$f_1, \dots, f_n$ – заданные ФНП.

Опр. Порядком системы наз. число уравнений (= число неизвестных) в системе.

Опр. Решением с-ы (1) наз. набор дифф. ф-й $y_1, \dots, y_n$, кот. обращают все ур-я (1) в тождества. График решения (кривая $y_1 = y_1(x), \dots, y_n = y_n(x)$ в $(n+1)$-мерном прост-ве) наз. интегральной кривой с-ы (1).

Опр. Общим решением с-ы (1) наз. мн-во ф-й $y_1 = \varphi_1(x, C_1, \dots, C_n), \dots, y_n = \varphi_n(x, C_1, \dots, C_n)$, кот. при любом наборе постоянных $C_1, \dots, C_n$ задают решение (1). Придавая постоянным C_i конкретные значения, получим частное решение с-ы (1).

Опр. Задача Коши для системы (1) заключается в поиске такого решения с-ы (1), кот. удовлетворяет начальным условиям:
$y_1(x_0) = y_{10}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0}$

Теор. (Коши о ∃-и и ед-ти решения з. К. для нормальной системы). Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ф-и $f_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, f_n(x, y_1, \dots, y_n)$ непр. и имеют непр. ЧП по переменным $y_1, \dots, y_n$. Тогда для любой точки $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0}) \in D$ решение з. К.:

$$\begin{cases} y_i' = f_i(x, y_1, .., y_n), \; i = \overline{1,n} \\ y_1(x_0) = y_{10}, .., y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases}$$

существует и единственно. □

Замечание. В приложениях нормальную с-у часто записывают в виде:

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, .., x_n), \quad i = \overline{1,n},$$

где t - независимая переменная (время), $x_1 = x_1(t), .., x_n = x_n(t)$ - неизв. ф-и, $\dot{x}_i = dx_i/dt$.

§2. Сведение ДУ n-го пор. к нормальной с-е

Рассмотрим ДУ n-го пор., разрешённое относительно старшей произв.:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', .., y^{(n-1)}).$$

Его можно свести к норм. с-е ДУ того же порядка. Обозначим:

$$y(x) = y_1(x), \quad y'(x) = y_2(x), .., y^{(n-1)}(x) = y_n(x).$$

Тогда исходное ДУ преобр-ся в норм. систему:

$$\left.\begin{cases} y_1' = y_2, \; y_2' = y_3, .., y_{n-1}' = y_n, \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, .., y_n) \end{cases}\right\} \text{норм. с-а n-го пор.}$$

Нормальную с-у в большинстве случаев тоже можно свести к ДУ того же порядка. Покажем это для случая $n=2$. Пусть дана норм. с-а:

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2) \end{cases}$$

Продиф-ем первое уравнение по x:

$$y_1'' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot y_1' + \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot y_2' = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} \cdot f_1(x, y_1, y_2) +$$

$$+ \frac{\partial f_1}{\partial y_2} \cdot f_2(x, y_1, y_2) = F(x, y_1, y_2)$$

Пусть из первого ур-е удалось выразить y_2:

$$y_2 = v(x, y_1, y_1').$$

Тогда, подставив это в выр-е для y_1'', получим ДУ 2-го пор.:

$$y_1'' = F(x, y_1, v(x, y_1, y_1')).$$

Решая ур-е, находим y_1, а y_2 м.б. найдена с пом. $y_2 = v(x, y_1, y_1')$.

Пример. Рассмотрим нормальную с-у:

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 \\ y_2' = y_1 \end{cases}$$

Дифференцируя первое ур-е по x, имеем

$$y_1'' = -y_2' = -y_1 \Rightarrow y_1'' + y_1 = 0.$$

общее решение этого ур-я имеет вид:

$$y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Из первого ур-я выразим $y_2 = -y_1' \Rightarrow$

$$y_2 = C_1 \sin x - C_2 \cos x$$

т.о., общее решение с-ы им. вид:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ y_2 = C_1 \sin x - C_2 \cos x. \end{cases}$$

§3. Первые интегралы нормальной системы

Рассмотрим систему (1):

$$y_i' = f_i(x, y_1, .., y_n), \quad i = \overline{1,n}$$

Опр. Функцию $\Psi(x, y_1, .., y_n)$ наз. первым интегралом системы (1), если она непр. вместе со своими ЧП и при подстановке в неё любого реш-я с-ы (1) она сохраняет постоянное значение, т.е. если $y_1 = \varphi_1(x), .., y_n = \varphi_n(x)$ – решение с-ы (1), а $\Psi(x, y_1, .., y_n)$ – её первый интеграл, то $\Psi(x, \varphi_1(x), .., \varphi_n(x)) = C$.

Опр. Пусть имеется ф-я $\Phi(x, y_1, .., y_n)$, заданная на некоторой области G. Выражение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} f_i(x, y_1, .., y_n)$$

наз. производной ф-и Φ в силу системы (1) на G.

Теор. (об условиях, при которых функция Φ явл. первым интегралом системы). Пусть в системе (1) правые части непрерывно диф-мы по всем переменным. Для того, чтобы непр. диф-мая ф-я $\Phi(x, y_1, .., y_n)$ была первым интегралом с-ы (1), необх-мо и дост-но, чтобы её производная в силу системы (1) равнялась нулю в области G. □

Пример. Покажем, что функция
$$\psi(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2 -$$
первый интеграл системы:
$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -y_1 \end{cases} \text{ на } \mathbb{R}.$$
Производная ψ в силу системы:
$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \cdot y_1' + \frac{\partial \psi}{\partial y_2} \cdot y_2' = 2y_1 \cdot y_2 + 2y_2 \cdot (-y_1) \equiv 0$$
Значит, ф-я $\psi(y_1, y_2)$ постоянна на решениях системы $\Rightarrow$ она явл. первым интегралом системы.

§4. Понижение порядка системы с помощью первых интегралов.

Зная некоторые первые интегралы с-ы, можно понизить её порядок. Рассмотрим задачу Коши для норм. с-ы n-го пор.:
$$\begin{cases} y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_n), \ i = \overline{1, n}, \\ y_1(x_0) = y_{10}, \dots, y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases}$$
Пусть $\psi(x, y_1, \dots, y_n)$ – первый интеграл норм. с-ы. Вычислим $C_0 = \psi(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$. Тогда в любой т-ке иск. реш-я $\psi(x, y_1, \dots, y_n) = C_0$. Выразим отсюда $y_n = u(x, y_1, \dots, y_{n-1}, C_0)$, и подставим эту ф-ю в первые $(n-1)$ ур-я:
$$\begin{cases} y_i' = f_i(x, y_1, \dots, y_{n-1}, u(x, y_1, \dots, y_{n-1}, C_0)), \ i = \overline{1, n-1} \\ y_1(x_0) = y_{10}, \dots, y_{n-1}(x_0) = y_{n-1,0} \end{cases}$$
Получим з.к. для системы $(n-1)$-го пор. Если $y_1 = \varphi_1(x, C_0), \dots, y_{n-1} = \varphi_{n-1}(x, C_0)$ – решение этой з.к., то решение исходной з.к. имеет вид:
$$y_1 = \varphi_1(x, C_0), \dots, y_{n-1} = \varphi_{n-1}(x, C_0),$$
$$y_n = u(x, \varphi_1(x, C_0), \dots, \varphi_{n-1}(x, C_0)).$$

Опр. Первые интегралы $\psi_1(x, y_1, \dots, y_n), \dots, \psi_n(x, y_1, \dots, y_n)$ системы (1) наз. независимыми, если их матрица Якоби невырожденна.

Для решения с-ы дост-но найти n (функционально) незав. первых интегралов.

§5. Нахождение первых интегралов норм. с-м

На практике для нахождения первых интегралов можно исп-ть выделение интегрируемых комбинаций: ДУ, кот. явл. следствием данной с-м ДУ и легко интегрируется. Любое решение такого ДУ дает первый интеграл системы.

Для этого систему лучше переписать в симметрической форме:

$$\frac{dy_1}{f_1(x, y_1, \dots, y_n)} = \frac{dy_2}{f_2(x, y_1, \dots, y_n)} = \dots = \frac{dy_n}{f_n(x, y_1, \dots, y_n)} = dx$$

Чтобы выделить интегр. комбинацию, достаточно выбрать пару отношений, допускающих разделение переменных, или воспользоваться свойством равных дробей:

если $\frac{n_1}{m_1} = \frac{n_2}{m_2} = \dots = \frac{n_s}{m_s} = \gamma$,

то $\forall \alpha_1, \dots, \alpha_s$ $\frac{\alpha_1 n_1 + \dots + \alpha_s n_s}{\alpha_1 m_1 + \dots + \alpha_s m_s} = \gamma$.

При этом коэф-ты $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ выбираются так, чтобы знам-ль дроби был $= 0$, а числитель представлял собой полный диф-л ф-ии. Тогда эта ф-я и есть первый интеграл с-м.

Пример. Решим норм. с-у:

$$\left\{ y_1' = \frac{y_2}{y_1 + y_2}; \quad y_2' = \frac{y_1}{y_1 + y_2} \right.$$

Система в сим. форме: $\frac{dx}{y_1 + y_2} = \frac{dy_1}{y_2} = \frac{dy_2}{y_1}$

$\frac{dy_1}{y_2} = \frac{dy_2}{y_1} \Rightarrow y_1\, dy_1 = y_2\, dy_2 \Rightarrow \psi_1 = y_1^2 - y_2^2$ - первый $\int$-л

Для нах-я 2-го первого $\int$-ла исп-ем св-во равных дробей при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -1$:

$\frac{dx - dy_1 - dy_2}{(y_1 + y_2) - y_2 - y_1} = \frac{d(x - y_1 - y_2)}{0} \Rightarrow$ ф-я $\psi_2 = x - y_1 - y_2$ - первый интеграл с-м

общее решение системы (в неявном виде):

$$\begin{cases} y_1^2 - y_2^2 = C_1 \\ x - y_1 - y_2 = C_2. \end{cases}$$