Лекция 15. Линейные системы ОДУ.

§1. Линейные системы ОДУ.

Опр. Линейными системами ОДУ наз. нормальные системы вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}(x)\, y_1 + a_{12}(x)\, y_2 + \ldots + a_{1n}(x)\, y_n + b_1(x) \\ y_2' = a_{21}(x)\, y_1 + a_{22}(x)\, y_2 + \ldots + a_{2n}(x)\, y_n + b_2(x) \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1}(x)\, y_1 + a_{n2}(x)\, y_2 + \ldots + a_{nn}(x)\, y_n + b_n(x), \end{cases} \quad (2)$$

где ф-и $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $i,j = \overline{1,n}$, непр. на I.

В матричном виде с-а записывается в виде:

$$Y' = AY + B, \quad \text{где} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix}; \quad Y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_n' \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & \ldots & a_{1n}(x) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(x) & \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ \ldots \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

Теор. (о ∃-и и ед-ти решения задачи Коши для линейной системы). Пусть ф-и $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $i,j = \overline{1,n}$, непр. на пром-ке I. Тогда для любой точки $x_0 \in I$ и любых чисел $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ решение задачи Коши

$$\begin{cases} (2) \\ y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20}, \ldots, y_n(x_0) = y_{n0} \end{cases}$$

существует и единственно.

Д-во: аналогично д-ву теор. Коши для линейных ДУ: нужно д-ть, что все ЧП от ф-й правой части по переменным $y_1, \ldots, y_n$ непр. ∎

Опр. Линейную систему (2) наз. однородной, если все $b_i(x) \equiv 0$. В прот. случае с-а (2) наз. неоднородной.

§2. Свойства частных решений лин. с-м

Будем записывать систему в матр. виде:

$$y' = A(x)y + b(x),$$

где y, y', $b(x)$ – вектор-ф-и, $A(x)$ – матрица коэф-тов

① Теор. Пусть y_1, y_2 – решения лин. однор. системы $y' = A(x)y$. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ $\alpha y_1 + \beta y_2$ – тоже решение этой системы.

Д-во: $y_1' = A(x)y_1$, $y_2' = A(x)y_2 \Rightarrow$

$$(\alpha y_1 + \beta y_2)' = \alpha y_1' + \beta y_2' = \alpha A(x) y_1 + \beta A(x) y_2 = A(x)(\alpha y_1 + \beta y_2) \Rightarrow \alpha y_1 + \beta y_2$$

– решение этой системы. ∎

② Теор. Если y_1, y_2 – решения с-ы $y' = A(x)y + b(x)$, то их разность $y_1 - y_2$ – решение $y' = A(x)y$.

Д-во: $y_1' = A(x)y_1 + b(x)$, $y_2' = A(x)y_2 + b(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (y_1 - y_2)' = y_1' - y_2' = A(x)y_1 + b(x) - A(x)y_2 - b(x) = A(x)(y_1 - y_2) \Rightarrow y_1 - y_2$$

– реш-е $y' = A(x)y$. ∎

③ Теор. Если y_1 – решение $y' = A(x)y$, а y_2 – решение $y' = A(x)y + b(x)$, то $y_1 + y_2$ – решение неодн. системы $y' = A(x)y + b(x)$

Д-во: $y_1' = A(x)y_1$; $y_2' = A(x)y_2 + b(x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow (y_1 + y_2)' = y_1' + y_2' = A(x)y_1 + A(x)y_2 + b(x) = A(x)(y_1 + y_2) + b(x).$$

∎

§3. Линейные однородные системы

Опр. Система вектор-функций $y^1(x), .., y^n(x)$ наз. линейно зависимой в интервале I, если $\exists$ такие числа $\lambda_1, .., \lambda_n$, $\lambda_1^2 + .. + \lambda_n^2 \neq 0$, что $\lambda_1 y^1(x) + \ldots + \lambda_n y^n(x) \equiv 0$. В прот. случае система ф-й $y^1(x), .., y^n(x)$ наз. линейно независимой.

Опр. Определителем Вронского с-ы вектор-ф-й $y^1(x), .., y^n(x)$ наз. опр-ль функц. матрицы

$$W(x) = \left| y^1(x) \ldots y^n(x) \right| = \begin{vmatrix} y_1^1(x) & \ldots & y_1^n(x) \\ \ldots & & \vdots \\ y_n^1(x) & \ldots & y_n^n(x) \end{vmatrix}.$$

Теор. Если система вектор-функций $y^1(x), .., y^n(x)$ линейно зависима на I, то её опр-ль Вронского $\equiv 0$ на I.

Д-во: аналогично д-ву для лин. уравнений: из линейной зав-ти системы ф-й следует линейная зависимость столбцов $W(x) \Rightarrow W(x) \equiv 0$. ■

Теор. Пусть $y^1(x), .., y^n(x)$ — решения линейной однородной системы $y' = A(x)y$ с непр. коэф-тами $a_{ij}(x)$. Для того, чтобы вектор-функции $y^1(x), .., y^n(x)$ были линейно независимы на I, необх-мо и дост-но, чтобы их опр-ль Вронского не обращался в 0 ни в одной точке промежутка I.

Д-во: аналогично д-ву для лин. уравнений:

($\Rightarrow$) Необходимость. От противного.

Если $y^1(x), .., y^n(x)$ л/з, то их тривиальная лин. комбинация $\lambda_1 y^1(x) + \ldots + \lambda_n y^n(x) \equiv 0$ в т. x_0 явл. решением задачи Коши для системы $y' = A(x)y$ с начальным условием $y(x_0) = 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow$ по теор. Коши $\lambda_1 y^1(x) + \ldots + \lambda_n y^n(x) \equiv 0$, т.е. $y^1(x), .., y^n(x)$ л/з — противоречие.

($\Leftarrow$) Достаточность — опирается на пред. теор. ■

Опр. Систему из n линейно независимых решений линейной однор. системы $y' = A(x)y$ наз. фундаментальной системой решений (ФСР) этой с-ы.

Теор. Для линейной однор. системы $y'=A(x)y$ с непр. на I коэф-тами $a_{ij}(x)$ $\exists$ ФСР.

Д-во: Такую ФСР образуют, например, решения следующих задач Коши:

1) $y'=A(x)y,\ y(x_0)=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} \Rightarrow y^1(x)$

2) $y'=A(x)y,\ y(x_0)=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} \Rightarrow y^2(x)$

...

n) $y'=A(x)y,\ y(x_0)=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix} \Rightarrow y^n(x)$. ■

Теор. (о структуре общего решения линейной однородной системы) Пусть $y^1(x),..,y^n(x)$ – ФСР линейной однородной системы $y'=A(x)y$ с непр. коэф-тами $a_{ij}(x)$, $i,j=\overline{1,n}$. Тогда общее решение однородной системы записывается в виде

$$y_{oo}(x)=C_1y^1(x)+\ldots+C_ny^n(x)$$

Д-во: аналогично случаю лин. ДУ: в силу линейности $y_{oo}(x)$ явл. решением системы $\forall C_1,..,C_n$, а любое решение с-мы $y'=A(x)y$ м.б. представлено в этом виде, т.к. для любого реш-е з. К. в т. x_0 коэф-ты $C_1,..,C_n$ м. б. однозначно определены в силу отличия от 0 $W(x)$. ■

§4. Линейные неоднородные системы

Рассмотрим норм. систему вида

$$y' = A(x)\,y + b(x)$$

Теор. (о структуре общего решения лин. неодн. системы). Пусть ф-и $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $i,j=\overline{1,n}$ непр. на I. Тогда общее решение системы $y' = A(x)\,y + b(x)$ имеет вид:

$$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = y_{чн} + C_1 y^1(x) + \ldots + C_n y^n(x),$$

где $y_{чн}$ - некоторое частное решение $y' = A(x)y + b(x)$,
$y^1(x), \ldots, y^n(x)$ - ФСР однор. системы,
$C_1, \ldots, C_n$ - произв. постоянные

Д-во: аналогично д-ву для лин. ДУ: по св-вам частных решений $y_{он} - y_{чн}$ есть решение однор. с-ы, а значит, имеет указанный вид.

Для нахождения общего решения ЛНДУ можно использовать метод вариации произвольных постоянных.

Пусть общее решение однор. системы им. вид

$$y_{оо} = C_1 y^1(x) + \ldots + C_n y^n(x),$$

Тогда общее решение неодн. с-ы ищем в виде

$$y_{он} = C_1(x)\,y^1(x) + \ldots + C_n(x)\,y^n(x),$$

где функции $C_i'(x)$ определяются из с-ы:

$$\begin{cases} C_1'\,y_1^1(x) + \ldots + C_n'\,y_1^n(x) = b_1(x) \\ C_1'\,y_2^1(x) + \ldots + C_n'\,y_2^n(x) = b_2(x) \\ \ldots \\ C_1'\,y_n^1(x) + \ldots + C_n'\,y_n^n(x) = b_n(x) \end{cases}$$

а ф-и $C_i(x)$ получаются интегрированием своих производных.

§5. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим лин. однор. с-му вида

$$\begin{cases} y_1' = a_{11} y_1 + \ldots + a_{1n} y_n \\ \ldots \\ y_n' = a_{n1} y_1 + \ldots + a_{nn} y_n \end{cases}$$ или $y' = Ay$, где

$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ - матрица коэф-тов

Будем искать решение с-мы в виде $y = ve^{kx}$, где $v \in \mathbb{R}^n$ и $k \in \mathbb{R}$ подлежат определению.

Подставим в с-му: $(ve^{kx})' = Ave^{kx} \Rightarrow$

$\Rightarrow kve^{kx} = Ave^{kx} \Rightarrow Av = kv$

$\Rightarrow v$ - собств. в-р, а k - собств. число матр. A.

Опр. Алгебраическое уравнение вида

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

наз. характеристическим уравнением соотв. линейной однородной системы.

Это уравнение имеет ровно n корней с учётом их кратностей. Определив корни х.у, можно построить ФСР линейной одн. системы с помощью след. правил.

① Каждому действительному корню k кратности 1 в ФСР соотв-ет решение ve^{kx}, где v - собств. в-р матр. A, соотв. собств. числу k.

Пример. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = y_2 - 4y_1 \end{cases}$

Матрица коэф-тов им. вид: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем собств. числа и собств. в-ры:

$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ при $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$.

1) $\lambda_1 = 3$: $\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \sim (2 \;\; 1) \to \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$; $y^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3x}$

2) $\lambda_2 = -1$: $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \sim (2 \;\; -1) \to \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $y^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x}$

общее решение системы:

$y_{oo} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{3x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-x}$

(2) Пусть $k = \alpha \pm i\beta$ – пара простых комплексно-сопр. корней характ. ур-я, $v = p + iq$ – комплексный вектор, соотв. комплексному с.з. $k = \alpha + i\beta$. Тогда комплексная вектор-функция $y(x) = (p+iq)\, e^{(\alpha+i\beta)x}$ – решение сист. $y' = Ay$. Действит. решения этой с-ы имеют вид:

$$y^1(x) = Re\,(y(x)) \;;\; y^2(x) = Im\,(y(x)) \text{ – ФСР.}$$

Пример. $\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$

Матрица коэф-тов равна $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Найдем собств. числа и собств. векторы:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$$

Рассмотрим $\lambda = i$:

$$\begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \cdot (1+i) \sim \begin{pmatrix} 2 & -(1+i) \\ 2 & -(1+i) \end{pmatrix} \sim (2 \;\; -(i+1)) \rightarrow \begin{pmatrix} i+1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим ф-ю

$$ve^{\lambda x} = \begin{pmatrix} i+1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{ix} = \begin{pmatrix} i+1 \\ 2 \end{pmatrix} (\cos x + i \sin x) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ 2\cos x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ 2 \sin x \end{pmatrix}$$

$$\text{ФСР: } y^1(x) = \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ 2\cos x \end{pmatrix} ;\; y^2(x) = \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ 2\sin x \end{pmatrix}.$$

Общее решение системы им. вид:

$$y_{oo}(x) = C_1 \begin{pmatrix} \cos x - \sin x \\ 2\cos x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ 2 \sin x \end{pmatrix}.$$

(3) Пусть k – действит. корень кратности r х.у. Возможны 2 случая:

а) СЛАУ $(A - kE)X = 0$ имеет r линейно независимых решений $v^1, .., v^r$. Тогда корню k в ФСР соотв-ют r функций $v^1 e^{kx}, .., v^r e^{kx}$.

б) СЛАУ $(A - kE)x = 0$ имеет только s линейно независимых решений, $s < r$. Тогда решение системы $y' = Ay$ нужно искать в виде произведения многочлена степени $r - s$ с неопр. коэф-тами на e^{kx}:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 x + \ldots + a_{r-s+1} x^{r-s} \\ \vdots \\ b_1 + b_2 x + \ldots + b_{r-s+1} x^{r-s} \end{pmatrix} e^{kx}$$

Для нахождения неопр. коэф-тов подставляем $(y_1 \dots y_n)^T$ в систему, приравниваем коэф-ты при одинаковых степенях и получаем СЛАУ с вырожденной матрицей. Решая её методом Гаусса, находим решение, зависящее от n констант $C_1, .., C_n$ $\Rightarrow$ общее решение одн. системы, т.е. вклад корня k в решение одн. с-мы.

Пример. $\begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 \\ y_2' = 4y_1 - y_2 \end{cases}$

Матрица коэф-тов имеет вид $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Собств. числа этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ кр. } 2$$

$A - E = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \sim (2 \ \ -1) \Rightarrow$ размерность собств. пр-ва меньше кратности корня

Ищем решение в виде:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bx \\ c + dx \end{pmatrix} e^x = \begin{pmatrix} (a+bx)e^x \\ (c+dx)e^x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} be^x + (a+bx)e^x \\ de^x + (c+dx)e^x \end{pmatrix}$$

Подставим в систему:

$$\begin{cases} be^x + (a+bx)e^x = 3(a+bx)e^x - (c+dx)e^x \\ de^x + (c+dx)e^x = 4(a+bx)e^x - (c+dx)e^x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b + (a+bx) = 3(a+bx) - (c+dx) \\ d + (c+dx) = 4(a+bx) - (c+dx) \end{cases}$$

Приравниваем коэф-ты при один. степ.:

$$\begin{array}{l} 1, 1: \\ x, 1: \\ 1, 2: \\ x, 2: \end{array} \begin{cases} b + a = 3a - c \\ b = 3b - d \\ d + c = 4a - c \\ d = 4b - d \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} c = 2a - b \\ d = 2b \end{array}$$

Обозначим $C_1 = a$, $C_2 = b \Rightarrow c = 2C_1 - C_2$, $d = 2C_2$.

Общее решение имеет вид:

$$y_{oo} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 + C_2 x \\ 2C_1 - C_2 + 2C_2 x \end{pmatrix} e^x = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} x \\ 2x - 1 \end{pmatrix} e^x$$