Подготовка к РК2

I. Составление уравнений

(1) Составить ЛОДУ по корням характерист. уравнения. Записать общее решение:

$$\lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 0;\ \lambda_3 = 1+3i;\ \lambda_4 = 1-3i$$

Решение: Сначала составим характеристический многочлен:

$$(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4) = 0$$

Подставим λ_i: $\lambda^2 (\underbrace{\lambda-1}_{a} - \underbrace{3i}_{b})(\underbrace{\lambda-1}_{a} + \underbrace{3i}_{b}) \leftarrow (a-b)(a+b) = a^2-b^2$

$$\lambda^2 \left((\lambda-1)^2 - 9i^2\right) = 0$$

$$\lambda^2 (\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 9) = 0$$

$$\lambda^2 (\lambda^2 - 2\lambda + 10) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda^4 - 2\lambda^3 + 10\lambda^2 = 0.}$$

Тогда ЛОДУ имеет вид: $y^{IV} - 2y''' + 10y'' = 0.$

общее решение:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l}\lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = 1 \\ y_2 = x \end{array} \\ \left.\begin{array}{l}\lambda_3 = 1+3i \\ \lambda_4 = 1-3i\end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{l} y_1 = e^x \cos 3x \\ y_2 = e^x \sin 3x \end{array} \end{array}\right\} \text{ФСР}$$

Общее решение ЛОДУ имеет вид:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x \cos 3x + C_4 e^x \sin 3x$$

(2) Могут ли функции $y_1 = e^x \sin 2x$ и $y_2 = e^x \cos 2x$ задавать ФСР некоторого ЛОДУ? Если могут, составить это уравнение.

Решение: Проверим линейную независимость этих функций:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x \sin 2x & e^x \cos 2x \\ e^x (\sin 2x + 2\cos 2x) & e^x (\cos 2x - 2\sin 2x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2x} (\cancel{\sin 2x \cos 2x} - 2\sin^2 2x - \cancel{\sin 2x \cos 2x} - 2\cos^2 2x) =$$

$$= e^{2x} (-2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x) = -2e^{2x} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ функции y_1, y_2 линейно независимы $\Rightarrow$ могут задавать ФСР некоторого ЛОДУ.

Чтобы составить это ЛОДУ, предположим, что y — общее решение.

Тогда $y,\ e^x\cos 2x,\ e^x\sin 2x$ — линейно зависимы

$\Rightarrow W(y, e^x\cos 2x, e^x\sin 2x) = 0.$

Составим определитель Вронского для этой системы функций:

$$\begin{vmatrix} y & e^x\cos 2x & e^x\sin 2x \\ y' & e^x(\cos 2x - 2\sin 2x) & e^x(\sin 2x + 2\cos 2x) \\ y'' & e^x(\cos 2x - 4\sin 2x - 4\cos 2x) & e^x(\sin 2x + 4\cos 2x - 4\sin 2x) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ -\mathrm{I} \\ +4\cdot\mathrm{I} \end{matrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y & e^x\cos 2x & e^x\sin 2x \\ y'-y & -2e^x\sin 2x & 2e^x\cos 2x \\ y''+4y & e^x(\cos 2x - 4\sin 2x) & e^x(\sin 2x + 4\cos 2x) \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2\cdot\mathrm{II} \end{matrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y & e^x\cos 2x & e^x\sin 2x \\ y'-y & -2e^x\sin 2x & 2e^x\cos 2x \\ y''-2y'+6y & e^x\cos 2x & e^x\sin 2x \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\mathrm{I} \end{matrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} y & e^x\cos 2x & e^x\sin 2x \\ y'-y & -2e^x\sin 2x & 2e^x\cos 2x \\ y''-2y'+5y & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{y'' - 2y' + 5y = 0.}$$

<u>Другой способ.</u>

ФСР: $\left.\begin{matrix} y_1 = e^x\cos 2x \\ y_2 = e^x\sin 2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \lambda_1 = 1+2i \\ \lambda_2 = 1-2i \end{matrix}\right]$ — корни характ. уравнения

Составим характеристическое уравнение:

$$(\underbrace{\lambda - 1}_{a} - \underbrace{2i}_{b})(\underbrace{\lambda - 1}_{a} + \underbrace{2i}_{b}) = 0 \leftarrow (a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

$$\left((\lambda-1)^2 - 4i^2\right) = 0$$

$$\left(\lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4\right) = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

ДУ: $\underline{y'' - 2y' + 5y = 0.}$

③ Составить ЛНДУ, общее решение которого имеет вид:

$$y = C\cos x + 1$$

<u>Решение:</u> $y_{он} = \underbrace{C \cdot \cos x}_{y_{оо}} + \underbrace{1}_{y_{чн}}$

Значит, решение однородного уравнения: $y_{оо} = C \cdot \cos x$

ФСР: $y_1 = \cos x$

Составим это однородное уравнение.

Функции y, $\cos x$ — линейно зависимы $\Rightarrow$

$$W(y, \cos x) = 0.$$

Составим определитель Вронского:

$$W = \begin{vmatrix} y & \cos x \\ y' & -\sin x \end{vmatrix} = 0$$

$$-y\sin x - y'\cos x = 0$$

$$y'\cos x + y\sin x = 0$$ — однородное уравнение.

Чтобы составить неоднородное уравнение, используем известное частное решение этого уравнения: $y_{чн} = 1$.

Тогда $y'_{чн}\cos x + y_{чн}\sin x = \underline{\sin x}$

и это правая часть ДУ.

Получим: $\underline{y'\cos x + y\sin x = \sin x}$

<u>Другой способ.</u> $y = C\cos x + 1$

Это ДУ I порядка, т.к. оно зависит от одной константы

$$y' = -C\sin x \;;\; y - 1 = C\cos x$$

$$+\begin{array}{l} y' = -C\sin x \;|\cdot\cos x \\ y-1 = C\cos x \;|\cdot\sin x \end{array}$$

$$y'\cos x + (y-1)\sin x = 0$$

$$\underline{y'\cos x + y\sin x = \sin x}$$

То есть достаточно из соотношений для y и y' исключить константу.

3

II ДУ, допускающие понижение порядка

Основные типы:

1) $f(x, y', y'') = 0$ – явно не содержит y ⇒ замена $y' = p$; $y'' = p'$.

2) $f(y, y', y'') = 0$ – явно не содержит x ⇒ замена $y' = p$; $y'' = p'p$.

(4) $xy'' + y' + x = 0$; $y(2) = 0$; $y'(2) = 0$.

Решение: Уравнение явно не содержит y ⇒ ⇒ допускает понижение порядка заменой

$$y' = p; \quad y'' = p'.$$

Получим ДУ I порядка:

$$xp' + p + x = 0 \quad / : x$$

$$p' + \frac{p}{x} = -1$$ – ЛНДУ первого порядка

Решим уравнение методом Бернулли.

$p = uv$; $p' = u'v + uv'$ Подставим в ДУ:

$$u'v + \underline{uv'} + \frac{uv}{x} = -1$$

$$u'v + u\underbrace{\left(v' + \frac{v}{x}\right)}_{=0} = -1$$

Получим систему: $\begin{cases} v' + \frac{v}{x} = 0 & (1) \\ u'v = -1 & (2). \end{cases}$

Решим (1):

$$v' + \frac{v}{x} = 0$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{v}{x}$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}$$

$$\ln v = -\ln x$$

$$v = \frac{1}{x}$$

(достаточно взять частное решение)

Решим (2):

$$u' \frac{1}{x} = -1$$

$$u' = -x$$

$$u = -\int x\,dx = -\frac{x^2}{2} + C_1$$

⇒ Общее решение этого ЛНДУ:

$$p = uv = \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{2} + C_1\right) = $$

$$= \frac{C_1}{x} - \frac{x}{2}.$$

Поскольку нам дана задача Коши, можно сразу найти константу c_1:

$$\left.\begin{matrix} p = y' = 0 \\ x = 2 \end{matrix}\right] \Rightarrow 0 = \frac{c_1}{2} - \frac{2}{2} \Rightarrow c_1 = 2.$$

Значит, $p = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}$.

Обратная замена: $y' = \frac{2}{x} - \frac{x}{2}$

$$y = \int \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right) dx = 2\ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2$$

Найдем константу c_2:

$$\left.\begin{matrix} y = 0 \\ x = 2 \end{matrix}\right] \Rightarrow 0 = 2\ln 2 - \frac{4}{4} + C_2 \Rightarrow C_2 = 1 - 2\ln 2$$

Получим частное решение: $y = 2\ln|x| - \frac{x^2}{4} + 1 - 2\ln 2$

5) $1 + y \cdot y'' + (y')^2 = 0 \quad ; \quad y(1) = y'(1) = 1.$

Решение: Это уравнение явно не содержит $x \Rightarrow$ $\Rightarrow$ допускает понижение порядка заменой

$$y' = p \;;\; y'' = p'p$$

Подставим в ДУ: $1 + yp'p + p^2 = 0$

$yp'p = -p^2 - 1$ – ДУ с разделяющимися переменными

Разделяем переменные:

$$yp\frac{dp}{dy} = -p^2 - 1 \quad \Big| : -y(p^2+1)$$

$$-\frac{p\,dp}{p^2+1} = \frac{dy}{y}$$

Интегрируем: $-\int \frac{p\,dp}{p^2+1} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(p^2+1)}{p^2+1} = -\frac{1}{2}\ln|p^2+1| + C$

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y| + C$$

Получим: $-\frac{1}{2}\ln|p^2+1| = \ln y + \frac{1}{2}\ln C_1 \quad \Big| \cdot (-2)$

$$\ln|p^2+1| = -2\ln y + \ln C_1$$

Потенцируем: $p^2 + 1 = \frac{C_1}{y^2} \Rightarrow p^2 = \frac{C_1}{y^2} - 1.$

Найдем константу C_1 из начальных условий:

$$\left.\begin{matrix} p = y' = 1 \\ y = 1 \end{matrix}\right] \Rightarrow 1 = \frac{C_1}{1} - 1 \Rightarrow \underline{C_1 = 2.}$$

Получим: $p^2 = \frac{2}{y^2} - 1$

$p = \sqrt{\frac{2}{y^2} - 1}$ (достаточно взять корень со знаком "+", т.к. y' в начальной точке положительна)

Сделаем обратную замену:

$y' = \sqrt{\frac{2}{y^2} - 1}$ – ДУ с разделяющимися переменными.

Разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2-y^2}{y^2}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2-y^2}}{y}$$

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{2-y^2}} = dx$$

Интегрируем: $\int \frac{y\,dy}{\sqrt{2-y^2}} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(2-y^2)}{\sqrt{2-y^2}} = -\sqrt{2-y^2} + C$

Получим:

$$-\sqrt{2-y^2} + C_2 = x$$

Найдем константу C_2 из начальных условий:

$$\left.\begin{matrix} y = 1 \\ x = 1 \end{matrix}\right] \Rightarrow -\sqrt{2-1} + C_2 = 1 \Rightarrow C_2 = 2$$

Получим частный интеграл ДУ:

$$\underline{-\sqrt{1-y^2} + 2 = x}.$$

Потерянные решения могли получиться при делении на y, p^2+1, но эти функции ($y=0$; $p^2+1=0$) не удовлетворяют начальным условиям.

III Метод вариации произвольных постоянных

Если известно решение ЛОДУ (2-го порядка):

$$y_{oo} = C_1 y_1 + C_2 y_2,$$

то решение соответствующего ЛНДУ можно искать в виде:

$$y_{он} = C_1(x)\, y_1 + C_2(x)\, y_2,$$

где функции $C_i(x)$ находятся из системы:

$$\begin{cases} C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' = b(x) \end{cases}$$, $b(x)$ – правая часть этого ДУ.

(6) Найти общее решение ЛНДУ:

$$y'' + y = tg x \cdot \sec x$$

Решение: 1) сначала решим соответствующее однородное уравнение:

$$y'' + y = 0$$

характ. уравнение: $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$

Значит, $\left.\begin{matrix} y_1 = \cos x \\ y_2 = \sin x \end{matrix}\right]$ ФСР этого однородного уравнения

$y_{oo} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ – общее решение однородного уравнения

2) ищем решение неоднородного уравнения:

$$y_{он} = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x$$

Система метода вариации:

$$\begin{cases} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0 \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на $\sin x$, второе – на $\cos x$ и сложим:

$$+\begin{array}{l} C_1' \cos x \sin x + C_2' \sin^2 x = 0 \\ -C_1 \sin x \cos x + C_2' \cos^2 x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \\ \hline \end{array}$$

$$C_2' = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Умножим первое уравнение на $\cos x$, второе – на $\sin x$ и вычтем из первого второе:

$$-\left\{\begin{array}{l} C_1' \cos^2 x + C_2' \sin x \cos x = 0 \\ -C_1' \sin^2 x + C_2' \cos x \sin x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ \hline \end{array}\right.$$

$$C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}$$

Проинтегрируем $C_i'(x)$:

$$C_1 = -\int tg^2 x \, dx = -\int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) dx = -tg x + x + \tilde{C}_1$$

$$C_2 = \int tg x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + \tilde{C}_2$$

Общее решение этого ЛНДУ:

$$y_{он} = (\underbrace{-tg x + x + \tilde{C}_1}_{C_1(x)}) \cos x + (\underbrace{-\ln|\cos x| + \tilde{C}_2}_{C_2(x)}) \sin x$$

(7) Найти общее решение ЛНДУ: $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2x}}{x}$

Решение: 1) сначала решим однородное уравнение:

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

Характ. уравнение: $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow (\lambda+2)^2 = 0$

$\lambda_{1,2} = -2$

Значит, $\left.\begin{matrix} y_1 = e^{-2x} \\ y_2 = x e^{-2x} \end{matrix}\right]$ ФСР $\Rightarrow y_{oo} = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$ — общее решение однородного ур-я

2) Будем искать решение неоднородного уравнения в виде:

$$y_{он} = C_1(x) e^{-2x} + C_2(x) x e^{-2x}$$

Система метода вариации:

$$\begin{cases} C_1' e^{-2x} + C_2' x e^{-2x} = 0 & \Big| \cdot e^{2x} \\ -2C_1' e^{-2x} + C_2'(e^{-2x} - 2x e^{-2x}) = \frac{e^{-2x}}{x} & \Big| \cdot e^{2x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' + C_2' x = 0 \\ -2C_1' + C_2'(1-2x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на 2 и сложим:

$$+\begin{array}{l} 2C_1' + 2C_2' x = 0 \\ -2C_1' + C_2'(1-2x) = \frac{1}{x} \\ \hline C_2' = \frac{1}{x} \end{array}$$

Из первого уравнения системы: $C_1' = -C_2' x = -1$.

Проинтегрируем $C_1'(x)$, $C_2'(x)$:

$$C_1 = -\int dx = -x + \tilde{C}_1$$

$$C_2 = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + \tilde{C}_2$$

Получим общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{он} = \underbrace{(-x + \tilde{C}_1)}_{C_1(x)} e^{-2x} + \underbrace{(\ln|x| + \tilde{C}_2)}_{C_2(x)} x e^{-2x}$$

8

IV ЛНДУ с постоянными коэффициентами и специальной правой частью

Если известны все корни характеристического уравнения, то по правой части $b(x)$ можно определить вид частного решения ЛНДУ, зависящий от неопределенных коэффициентов:

$$1)\ b(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$$ ← многочлен степени n

а) α – не корень х. у.

$$y_{чн} = e^{\alpha x} Q_n(x)$$

б) α – корень х. у. кратности r

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x} Q_n(x)$$

$Q_n(x)$ – многочлен n-ой степени с неопределенными коэффициентами

$$2)\ b(x) = e^{\alpha x}\left(\underbrace{P_n(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x}_{\text{многочлены}}\right)$$

а) $\alpha \pm \beta i$ – не корни х.у.

$$y_{чн} = e^{\alpha x}\left(Q_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x\right)$$

б) $\alpha \pm \beta i$ – корни х.у. кратн. r

$$y_{чн} = x^r e^{\alpha x}\left(Q_N(x)\cos\beta x + T_N(x)\sin\beta x\right)$$

$Q_N(x), T_N(x)$ – многочлены степени $N = \max\{n, m\}$ с неопределенными коэффициентами

8) Указать вид общего решения (без вычисления коэффициентов):

$$y^{IV} + y'' = xe^{-x} + 2 - x + x\sin x - e^x \sin x$$

Решение: 1) Сначала решим однородное уравнение:

$$y^{IV} + y'' = 0$$

хар. ур.: $\lambda^4 + \lambda^2 = 0$

$$\lambda^2(\lambda^2 + 1) = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_{1,2} = 0}\ ;\ \underline{\lambda_{3,4} = \pm i}$$

$$\left.\begin{matrix}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 0\end{matrix}\right] \Rightarrow \begin{matrix}y_1 = 1\\ y_2 = x\end{matrix}\ ;\ \left.\begin{matrix}\lambda_3 = i\\ \lambda_4 = -i\end{matrix}\right] \Rightarrow \begin{matrix}y_3 = \cos x\\ y_4 = \sin x\end{matrix}\ – ФСР$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3\cos x + C_4 \sin x$$

2) Рассмотрим правую часть ДУ:

$$b(x) = \underbrace{xe^{-x}}_{b_1(x)} + \underbrace{2 - x}_{b_2(x)} + \underbrace{x\sin x}_{b_3(x)} \underbrace{- e^x \sin x}_{b_4(x)}$$

Найдем вид частного решения, соответствующего каждому из слагаемых $b(x)$.

• $b_1(x) = xe^{-2x} = e^{-2x} \cdot x$

$\alpha = -2$ — не корень характ. уравнения (случай 1а)

$y_{чн1} = e^{-2x}\,(\underbrace{A_1 x + B_1}_{\text{многочлен первой степени с неопр. коэф-тами}})$

• $b_2(x) = 2 - x = e^{0x} \cdot (2-x)$

$\alpha = 0$ — корень характ. уравнения кратности 2 (случай 1б)

$y_{чн2} = x^2 \cdot e^{0x} \cdot (A_2 x + B_2) = x^2\,(A_2 x + B_2)$

• $b_3(x) = x\sin x = e^{0x}\,(\sin x \cdot x + \cos x \cdot 0)$

$\alpha \pm \beta i = 0 \pm 1 \cdot i = \pm i$ — корни характ. уравнения (случай 2б)

$y_{чн3} = e^{0x}\,(\sin x \cdot (A_3 x + A_4) + \cos x \cdot (B_3 x + B_4)) =$

$= \sin x \cdot (A_3 x + A_4) + \cos x \cdot (B_3 x + B_4)$

• $b_4(x) = -e^x \sin x = e^x\,(-\sin x + 0 \cdot \cos x)$

$\alpha \pm \beta i = 1 \pm i = 1 \pm i$ — не корни характ. уравнения (случай 2а)

$y_{чн4} = e^x\,(A_5 \sin x + B_5 \cos x)$

многочлены нулевой степени с неопределёнными коэф-тами

Значит, общий вид частного решения неоднородного уравнения:

$y_{чн} = y_{чн1} + y_{чн2} + y_{чн3} + y_{чн4} =$

$= e^{-2x}\,(A_1 x + B_1) + x^2\,(A_2 x + B_2) + \sin x\,(A_3 x + A_4) + \cos x\,(B_3 x + B_4) +$

$+ e^x\,(A_5 \sin x + B_5 \cos x).$

Вид общего решения неоднородного уравнения:

$y_{он} = y_{оо} + y_{чн} = C_1 + C_2 x + C_3 \cos x + C_4 \sin x +$

$+ e^{-2x}\,(A_1 x + B_1) + x^2\,(A_2 x + B_2) + \sin x\,(A_3 x + A_4) + \cos x\,(B_3 x + B_4) +$

$+ e^x\,(A_5 \sin x + B_5 \cos x).$

(9) Указать вид общего решения (без вычисления коэффициентов):

$$y^{V} - 5y^{IV} + 4y''' = 2 + xe^{-2x} + xe^x - e^{-2x}\cos 3x$$

<u>Решение</u>: 1) Сначала решим однородное уравнение:

$$y^{V} - 5y^{IV} + 4y''' = 0$$

Характ. уравнение: $\lambda^5 - 5\lambda^4 + 4\lambda^3 = 0.$

$$\lambda^3(\lambda^2-5\lambda+4)=0$$

$\lambda_{1,2,3}=0;$ $\lambda_4=1;$ $\lambda_5=4$ – корни характ. ур

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

$$\left.\begin{array}{lll} y_1=1 & y_4=e^x & y_5=e^{4x} \\ y_2=x & & \\ y_3=x^2 & & \end{array}\right\}\ \text{ФСР}$$

Общее решение однородного уравнения:

$$y_{oo}=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^x+C_5e^{4x}$$

2) Рассмотрим правую часть:

$$b(x)=\underbrace{2}_{b_1(x)}+\underbrace{xe^{-2x}}_{b_2(x)}+\underbrace{xe^x}_{b_3(x)}\underbrace{-e^{-2x}\cos 3x}_{b_4(x)}$$

- $b_1(x)=2$

  $\alpha=0$ – корень характ. уравнения кратности 3 (случай 1б)

  $y_{чн1}=A_1\cdot x^3$

- $b_2(x)=xe^{-2x}$

  $\alpha=-2$ – не корень характ. уравнение (случай 1а)

  $y_{чн2}=e^{-2x}(A_2x+A_3)$

- $b_3(x)=xe^x$

  $\alpha=1$ – корень характ. уравнения кратности 1 (случай 1б)

  $y_{чн3}=xe^x(A_4x+A_5)$

- $b_4(x)=-e^{-2x}\cos 3x$

  $\alpha\pm\beta i=-2\pm 3i$ – не корни характ. уравнение (случай 2а)

  $y_{чн4}=e^{-2x}(A_6\cos 3x+A_7\sin 3x)$

Частное решение неоднородного уравнения:

$$y_{чн}=y_{чн1}+y_{чн2}+y_{чн3}+y_{чн4}=A_1x^3+e^{-2x}(A_2x+A_3)+$$
$$+xe^x(A_4x+A_5)+e^{-2x}(A_6\cos 3x+A_7\sin 3x)$$

Общее решение неоднородного уравнения:

$$y_{он}=y_{oo}+y_{чн}=C_1+C_2x+C_3x^2+C_4e^x+C_5e^{4x}+$$
$$+A_1x^3+e^{-2x}(A_2x+A_3)+xe^x(A_4x+A_5)+e^{-2x}(A_6\cos 3x+A_7\sin 3x).$$